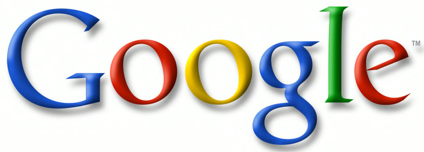
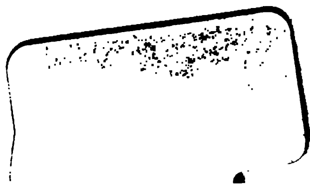



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907824 8



Grundriß

der

reinen Mathematik

zum Gebrauch

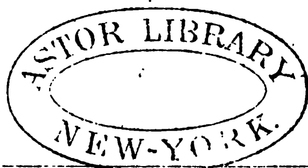
bey academischen Vorlesungen

abgefaßt

von

B. F. Thibaut

Hofrath und Professor der Mathematik in Göttingen.



Fünfte neu bearbeitete Auflage, mit 4 Kupfertafeln.

Göttingen,

bey Vandenhoeck und Ruprecht.

1831.

Vorrede.

Die gegenwärtige neue Auflage eines seit beynahe dreißig Jahren unausgesetzt bey academischen Vorlesungen als Grundriß gebrauchten Buchs darf, ungeachtet die Grundidee, wodurch sich bey seiner ersten Abfassung Methode und Form der wissenschaftlichen Behandlung des Gegenstandes bestimmt haben, so wie einige der ersten Capitel, fast unverändert geblieben sind, in mehrfacher Beziehung eine neu bearbeitete genannt werden.

Es würde beträchtlichen Stoff zu Erörterungen darbieten, wenn die Gründe aller bey dieser wiederholten Bearbeitung vorgenommenen Veränderungen hinlänglich entwickelt werden sollten. Eine darauf gerichtete Darstellung mögte indessen, wenn auch die besonderen Veranlassungen vorhanden wären, deren es bedürfte, um eine Discussion dieser Art

mitzutheilen, nicht hierher gehören, da sie die Grenzen einer Vorrede weit überschreiten müßte, und dennoch für diejenigen, denen das Buch zum Leitfaden ihres ersten wissenschaftlichen Studiums dienen soll, erst später verständlich werden könnte, alsdann aber für die wenigsten unter ihnen Interesse haben dürfte.

Nur über zwey unter den neuen Zugaben, von denen die eine theoretischer, die andere practischer Art ist, mag hier, zur Rechtfertigung derselben, eine kurze Anzeige geschehen, da ihre Ungewöhnlichkeit leicht Befremden erregen mögte.

Es ist eine allgemein angenommene conventionelle Form geworden, einen der wichtigsten Theile der mathematischen Wissenschaften, die Theorie der approximativen Bestimmungen, in den Elementen durchaus nicht in Anregung zu bringen, sondern Alles, was ihr angehört, späteren und höheren Betrachtungen vorzubehalten. Diese Theorie ist aber, bis zu einer bestimmten Grenze, allerdings elementarischer Behandlung fähig; ihr practischer Nutzen, ja selbst ihre Unentbehrlichkeit für Diejenigen, welche über die Anfangsgründe hinauszugehn kein anderweitiges Bedürfniß haben, während sie von denselben Anwendungen zu machen vielfach genöthigt sind, springt in die Augen; es ist also schon aus dieser Ursache von Wichtigkeit, ihr so früh als möglich eine Stelle unter den Fundamentallehren einzuräumen.

Selbst für die Darstellung und das Studium der höheren Theile der Wissenschaft ist es von wesentlichem Nutzen, wenn die Keime der wichtigsten, in ihnen zur Ausführung und weiteren Vollendung kommenden, Ideen und Methoden bereits in den Grundlehren hervorgetreten sind. Dazu kommt noch, daß, in der Regel, in jenen höheren Theilen, dunkle, unvollständige, mitunter selbst falsche Lösungen der Aufgabe: aus den bekannten Grenzen, zwischen denen ursprüngliche Größen liegen, für andere, die aus ihnen abgeleitet werden sollen, gleichfalls Grenzen zu finden, zwischen denen diese enthalten seyn müssen, gegeben zu werden pflegen. Die dabey meistens an die Spitze gestellte bloße Versicherung, daß die Gleichungen zwischen Differenzialen als Gleichungen zwischen Differenzen angesehn werden können, sobald die Differenzen sehr klein sind, vernichtet, ohne weitere und genauere Begründung ihrer Anwendbarkeit, alle Sicherheit und Gründlichkeit der Resultate. So trägt namentlich eine der wichtigsten elementarischen Wissenschaften, die ebene Trigonometrie, in den üblichen Darstellungen der für ihren practischen Gebrauch unentbehrlichen, dennoch aber oft gänzlich weggelassenen, Lehren, welche den Zusammenhang unter den gleichzeitigen Aenderungen der Grundbestandtheile eines Dreyecksumfangs, und die darauf beruhenden Grenzbestimmungen betreffen, die Spuren unwissenschaftlicher und mangelhafter

Behandlung nur zu sehr in sich. Würde z. B. ein so verkehrter, für die practische Geometrie folgenreich gewordener, Satz, als der, welcher behauptet: unter allen Dreyecken gebe das gleichseitige die größte Richtigkeit in Absicht auf die Bestimmung der Schenkel, wenn sie aus der Basis und den Winkeln an ihr als Datis mittelbar abgeleitet werden sollen, überall haben hervortreten können, wenn eine gehörige Theorie der Grenzbestimmungen, auch nur elementarisch, bey seiner Ableitung Berücksichtigung gefunden hätte? Würde jemals die, ein merkwürdiges Beyspiel gedankenloser Rechnungsfertigkeit darbietende, von einem berühmten neueren französischen Mathematiker eingeführte, neue Classe trigonometrischer Formeln, die einen Winkel, für welchen nichts als eine seiner trigonometrischen Functionen gegeben ist, aus dieser mit größerer Genauigkeit, mittelbar, ableiten wollen, als die Function selbst, wenn er unmittelbar aus ihr bestimmt wird, gewähren kann, Eingang gefunden haben, wenn nicht jene Theorie gänzlich vernachlässigt worden wäre? Aus diesen Gründen sind in dem vorliegenden Lehrbuche, als erste ungewöhnliche Zugabe, zwey ganz neue Capitel, das eine der Arithmetik, das andere der Trigonometrie, beygefügt, und bey der Rectification des Kreises, so wie bey der Flächenberechnung, auf die erforderlichen Grenzbestimmungen die nöthigen Rücksichten genommen worden.

Die Wichtigkeit logarithmischer und trigonometrischer Tafeln, theils für die Arithmetik, theils für alle Anwendungen derselben auf Geometrie, ist unzweifelhaft; der Besitz solcher Tafeln daher schon bey dem ersten Studium dieser Wissenschaften unentbehrlich. Da sie für die meisten gewöhnlichen Anwendungen hinreichen, wenn sie auf einen geringen Umfang zusammengezogen werden, und sich ebendeswegen in dieser Form neuerlich sehr beliebt gemacht haben, so ist kein wesentliches Hinderniß vorhanden, sie in dieser Gestalt einem zur Grundlage des Studiums bestimmten Grundrisse der Arithmetik, ebenen Geometrie, und Trigonometrie beyzufügen, und dadurch die Brauchbarkeit desselben bedeutend zu erhöhen. Dieses ist dem gemäß in dem vorliegenden jetzt geschehen; die ihm angehängten Tafeln machen eine zweyte, ganz neue Zugabe desselben aus. Ihre Einrichtung überhaupt zu erklären, darf dem Vortrage vorbehalten werden, doch sey es erlaubt, auf zwey Puncte aufmerksam zu machen, in denen sich ihre Form von der allgemein üblichen unterscheidet.

Alle gangbaren Tafeln, für die Logarithmen sowohl, als für die trigonometrischen Functionen, geben diese Zahlen, abgebrochen in einer bestimmten Stelle, bald zu klein, bald zu groß, jenachdem das Eine oder das Andere eine geringere Abweichung von der Genauigkeit darbietet. Für nähernde

Berechnungen aber, und die dabey, wenn sie gehörig geführt werden sollen, erforderlichen Grenzbestimmungen, ist es sehr wesentlich, von den Zahlen, womit man rechnet, bestimmt zu wissen, ob sie zu groß oder zu klein sind. Dieses machen die hier als Anhang beygegebenen Tafeln durch eine besondere in ihnen angebrachte Modification, sowohl für die Zahlen, welche sie enthalten, als auch für deren Differenzen, möglich.

Als eine zweyte, weniger bedeutende, aber dennoch zweckmäßige Abweichung von der gewöhnlichen Form mag die hier für die trigonometrischen Tafeln getroffene Anordnung, wobey Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten und daneben auch die Logarithmen derselben (mit Ausnahme der von den Cotangenten, welche füglich gespart werden können) auf der nemlichen Seite vereinigt sind, bemerklich gemacht werden. Sie hat für den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln nicht allein in geometrischer, sondern auch in analytischer Beziehung unverkennbare Vortheile.

Inhaltsanzeige.

Seite

Seite

Grundlehren

der

Arithmetik.

Einleitung.

Erste Begriffe von Zahlen, ihren Arten, und ursprünglichen Verknüpfungen.

1. Der Begriff der Größe läßt sich nicht aus andern einfacheren bilden, sondern bezeichnet eine ursprüngliche Beschaffenheit, die nur durch unmittelbares Vorstellen der Gegenstände, denen sie zukommt, verständlich werden kann. Es gibt solcher Gegenstände, welche Größen sind, oder Größe haben, viele, von mancherlei verschiedenen Arten, aber sie besitzen ein gemeinschaftliches Merkmal, welches ebendeswegen den Grundcharacter aller Größen bezeichnet: Fähigkeit als aus gleichen Theilen bestehend gedacht zu werden, es sey nun daß solche gleiche Theile, von denen jeder ein aliquoter Theil der sie enthaltenden Größe zu heißen pflegt, schon in ihr vorhanden sind, oder durch Zerlegung, welche in diesem Falle Quotisirung der Größe genannt werden mag, erst in ihr gestiftet werden müssen.

Eine Größe heißt continuirlich, wenn ihrer Zerlegbarkeit in gleiche Theile in Absicht auf deren Anzahl keine Grenze gesetzt werden kann, jeder ihrer Theile also die nemliche Eigenschaft besitzt. Sie wird discret genannt, wenn man bey ihr zuletzt auf gleiche Theile zurückkommt, die selbst nicht weiter in andre zerlegbar sind. Continuirliche Größen sind das eigentliche Object der theoretischen Größenwissenschaft.

Ist eine Größe Vielheit von gleichen Theilen, so läßt sich ihre Vorstellung durch Wiederholung von der eines solchen Theils, erzeugen. Sind, allgemeiner, zwey Größen durch wiederholtes Setzen einer dritten entstanden, so ergibt sich die Möglichkeit, die eine durch die andre zu messen, und als Resultat einer Regel zu gewinnen, vermöge deren, durch Bilden unde Setzen von gleichen Theilen, aus der einen die andr abgeleitet werden kann. Der Ausdruck einer solchen Regel heißt eine Zahl.

2. Alle Zahlenbildung stützt sich auf die Postulate: daß jede Größe beliebig wiederholbar ist, und in jede beliebige Menge gleicher Theile zerlegt werden kann, so daß sowohl jede Vervielfachung als jede Quotisirung derselben selbst wieder eine Größe erzeugt. Sie hebt mit dem Setzen einer als bekannt und gegeben angenommenen Größe, die den Namen der Einheit erhält, an, und vollendet sich durch die Angabe einer Regel, vermöge deren aus dieser Einheit, oder einem durch vollzogene Quotisirung erhaltenen aliquoten Theile derselben, eine andre Größe als Vielheit erzeugbar ist. Diese Einheit gibt gewissermaaßen den Stoff, jene Regel bestimmt die Form der Zahl, welche unbenannt

heißt, wenn ihre Einheit völlig unbestimmt bleibt; eine benannte wird, wenn deren Eigenschaften besonders bezeichnet sind. Ist es lediglich wiederholtes Setzen der Einheit, wodurch die Zusammensetzung einer andern Größe zu Stande kommt, so entsteht die einfachste Art der Zahlen, die ganze Zahl, die nur einen Act ursprünglicher Art zu ihrer Erzeugung verlangt; muß aber zuvörderst die Einheit in eine vorgeschriebene Menge gleicher Theile zerlegt, und dann wiederholtes Setzen eines solchen vorgenommen werden, so entspringt der Bruch, zwey verschiedene ursprüngliche Acte erfordernd, welche anzuzeigen, zwey ganze Zahlen zusammentreten müssen, von denen die eine, sein Nenner, angibt, in wie viele gleiche Theile die Einheit als zerfällt gedacht; die andre, sein Zähler, bestimmt, welche Menge solcher Theile gesetzt werden soll. Für alle Größen die kleiner sind als die Einheit, werden, um sie auszudrücken, Brüche nothwendig; selbst bey den meisten derjenigen, welche beträchtlicher sind als ebendieselbe, ist das Gleiche der Fall. Man bestimmt die quantitative Form einer Zahl entweder wenn man aussagt, daß sie eine ganze Zahl, oder wenn man anzeigt, daß sie ein Bruch sey, zugleich aber im letzten Falle den Nenner dieses Bruchs ausdrücklich angibt.

3. Die mittelbaren Vorstellungen von Größen, welche durch Zahlen entspringen, sind unentbehrlich so fern es darauf ankommt, überhaupt Größenvorstellungen zu fixiren, und so zu bilden, daß sie jederzeit auf bestimmte Weise in der Erinnerung zurückgerufen werden können.

Wenn Grössenkenntniss lediglich auf das Fassen und Festhalten einzelner Werthe oder Zustände ankäme, so bedürfte es nur unmittelbarer Anschauungen, und daraus abstrahirter Zahlen, um sie zu Stande zu bringen. Aber sie hebt nur mit solchen einfachen Auffassungen an; ihre eigentlichen Gegenstände, welche Stoff für eine Grössenwissenschaft darbieten, sind Verknüpfungen unter mehreren, sich einander gegenseitig bestimmenden Grössen. Wenn verschiedene Grössen unter sich zusammenhängen; wenn jede derselben als durch eine Zahl ausgedrückt gedacht wird, so kann der Verknüpfung jener Grössen eine Verbindung unter den sie darstellenden Zahlen vielleicht entsprechen. Schon die Möglichkeit einer solchen Beziehung reicht hin, die Wichtigkeit der Wissenschaft klar zu machen, welche die Idee der Zahlenverknüpfung zu entwickeln, die verschiedenen Arten derselben zu erforschen, und, für jede, Regeln ihrer Vollziehung aus ihrem Begriffe abzuleiten strebt. Diese Wissenschaft ist die formale Arithmetik.

Ursprüngliche Verknüpfung zweyer Zahlen heisst diejenige, wobey die einfachen Acte vermöge deren sich diese Zahlen erzeugen, so zusammentreten, dass dasjenige, was dadurch entsteht, selbst wieder durch ähnliche einfache Acte ausgedrückt, das heisst als Zahl dargestellt werden kann. Sie lässt sich im Allgemeinen nur auf zwey Arten denken. Entweder die Acte wodurch die zweyte Zahl entsteht werden Fortsetzung derjenigen wodurch sich die erste erzeugt hat. Oder sie lassen sich an dieser erstern, als gegebenem Stoffe, so ausüben, dass das Entstehende eine Gestalt erhält, als wenn es selbst durch einfache Acte aus der Einheit entsprungen wäre. Die Vollziehung einer solchen ursprünglichen Verknü-

pfung, so wie die durch ihre Idee herbeygeführte Wiederauflösung derselben, wird mit dem Ausdrucke arithmetische Grundoperation bezeichnet.

Die Möglichkeit und Regel solcher Grundoperationen hat die Arithmetik für jede Art von Zahlen nachzuweisen.

Erster Abschnitt.

Theorie der arithmetischen Grundoperationen.

Erstes Capitel.

Von der Bildung der ganzen Zahlen, und den Rechnungsarten mit ihnen.

Eine ganze Zahl ist Ausdruck und Resultat derjenigen Handlung des Bewußtseyns, welche bey dem Auffassen einer Menge gleichartiger Dinge, vermittelst der Vorstellung von einem Dinge derselben Art, vorgenommen wird. Jene Handlung selbst, das Zählen, ist das erste Postulat der Arithmetik. Wenn man sich in den Act des Zählens würklich versetzt, so wird man Auffassung der einzelnen Elemente; Zurückerinnerung an die schon vorher zusammengefaßten; und Verknüpfung jedes einzelnen mit den schon vorhin zusammengefaßten, deutlich darin unterscheiden. Die Zahlen selbst sind kleiner oder größer, jenachdem das Zählen, wodurch sie sich bilden, früher oder später beendigt wird; eine größte Zahl kann es nicht geben.

Uebrigens läßt sich der Act des Zählens in seinem Fortgange nicht allein vorwärts, sondern auch rückwärts wenden, wie jede Thätigkeit, vermöge deren sich ursprüngliche Größenvorstellungen erzeugen.

Die Numeration unterrichtet uns über die willkührlich gewählten Namen und Zeichen, welche für die ganzen Zahlen eingeführt sind. Die Arithmethik kann solcher Zeichen nicht entbehren. Nicht bloß jede einzelne Zahl, sondern auch die verschiedenen Operationen, die mit Zahlen vollzogen werden können, haben ihre eigenthümlichen Zeichen erhalten, so daß sich dadurch Alles, was mit Zahlen vorgenommen werden soll, kürzer als mit Worten andeuten läßt. Außer den individuellen Zeichen für einzelne Zahlen bedient man sich auch noch unbestimmter, welche gemeiniglich in beliebig gewählten Buchstaben bestehn, wenn man beabsichtigt, allgemeine arithmetische Lehrsätze, auf kürzere und leichter übersehbare Art, als durch die gewöhnliche Wortsprache, auszudrücken.

I. Da der Act, wodurch sich die ganze Zahl erzeugt, fortgesetzt werden kann, soweit man will, und jede Fortsetzung desselben selbst wieder durch eine ganze Zahl bezeichnet werden muß, so ist allerdings eine Verknüpfung zweyer ganzen Zahlen möglich, wobey sich die Acte, wodurch die zweyte entstanden ist, als Fortsetzung an diejenigen anschließen, vermittelst deren sich die erste aus der Einheit erzeugt hat, so daß dadurch eine dritte bestimmte Zahl zu Stande kommt. Diese Operation heißt Addition oder Zusammenzählen; ihr Resultat Summe oder Aggregat; ihr Zeichen ist ein +, zwischen die zu verbindenden Zahlen gesetzt *).

*) Wollte man die Begriffe in der Arithmetik aus denen

Die Addition setzt Identität des Gezählten voraus, und vollführt sich durch zwey Acte des Zählens. Man hat denjenigen, welcher als geschlossen in der ersten angenommenen Zahl gegeben ist, noch weiter fortzuführen, so daß dabey durch einen zweyten, neben jenem ersten fortlaufenden, Act des Zählens jedesmal bemerkt wird, wie viel durch dieses weitere Fortzählen hinzugekommen ist, und die Operation zu schließen, wenn die Menge des Hinzugezählten der zweyten Zahl gleichkommt, welche mit der ersten vereinigt werden sollte.

So wie bey würklichen Größen die Ordnung der Theile für den Betrag des Ganzen gleichgültig ist, gilt auch in Absicht auf die Folge, welche die einzelnen Zahlen bey der Vereinigung beobachten, eine völlige Willkühr, insofern es nur auf die Größe der Summe ankommt. $a + b = b + a$.

Addition mehrerer Zahlen kommt offenbar auf wiederholte von zweyen zurück.

II. Die **Subtraction** nimmt eine Zahl als zusammengesetzt durch Addition aus zwey andern an, (den **Minuend**), läßt sich die eine von diesen beyden (den **Subtrahend**) gleichfalls geben, und bestimmt die Größe des andern (des **Restes**). Diese Operation, welche durch das Zeichen —, zwischen Minuend und Subtrahend gesetzt, angedeutet wird, ist also das Umgekehrte der vorhergehenden.

würklicher Größenverknüpfungen, welchen sie correspondiren sollten, entspringen lassen, so würde man den der Addition dadurch bezeichnen können, daß er diejenige Operation andeute, wodurch aus Zahlen, welche die Theile eines Ganzen ausdrücken, diejenige neue Zahl, welche das Ganze selbst ausdrückt, gefunden wird.

Man kann sie dem gemäß auf zwey Arten vollführen. Entweder: man zählt vom Minuend successiv einzelne Einheiten ab, bemerkt durch einen zweyten Act des Zählens, wie viele von ihm genommen sind, und schließt die Operation, wenn ihre Menge dem Subtrahend gleich geworden ist. Oder: man zählt dem Subtrahend Einheiten zu, bemerkt, wie viele deren sich nach und nach mit ihm vereinigen, und endigt die Arbeit, wenn die Größe des Minuends dabey erreicht worden ist. Diese zwiefache Möglichkeit in der Art des Subtrahirens gründet sich darauf, daß es in dem allgemeinen Begriffe der Operation unbestimmt bleibt, ob man die gesuchte Zahl bey der Bildung des Minuends als addirt zum Subtrahend, oder umgekehrt diesen als addirt zu ihr, annehmen soll. Folgende Zusätze fließen leicht aus dem allgemeinen Begriffe der Subtraction.

1. Wenn der Minuend aus Theilen besteht, so darf man von einem derselben, oder von einigen, wenn jener eine nicht ausreichen sollte, den gegebenen Subtrahend abziehn, und das Uebrigbleibende wird der Rest seyn. $(a + b) - c = a + (b - c) = a - c + b$.

2. Wenn im Ausdrucke des Minuend ein subtractiver Theil vorkommt, so darf man den Subtrahend mit diesem vereinigen. $(a - b) - c = a - (b + c)$. Umgekehrt also, wenn der Subtrahend aus Theilen besteht, so kann einer derselben nach dem andern vom Minuend abgezogen werden. $a - (b + c) = (a - b) - c$.

3. Wenn der Subtrahend selbst Theile, die in ihm von andern erst abgezogen werden sollen, in sich schließt,

so darf man seine nicht subtractiven Theile vom Minuend abziehn, die subtractiven hingegen muß man alsdann zu eben demselben addiren. $a - (b - c) = a - b + c$.

4. Wenn eine Größe aus der Addition und Subtraction mehrerer Zahlen erwachsen soll, so ist die Ordnung, worin diese Operationen vorgenommen werden, ohne Einfluß auf die Größe des Resultats.

III. Es ist bey ganzen Zahlen allerdings auch eine solche Verbindung möglich, wobey sich an die Acte, wodurch die erste entsteht, diejenigen, welche die zweyte erzeugen, so anschließen, daß sie das Resultat jener ersten Acte als Dasjenige aufnehmen, woran sie selbst vollzogen werden sollen. Die Multiplication, kurz ausgedrückt, ist diejenige Operation, welche eine gegebene Zahl für die Einheit der zweyten substituirt und das Resultat durch eine dritte bestimmt angegebene ausdrückt.

Man setzt bey dieser Operation eine unbenannte Zahl (den Multiplicator), welche, als solche, nichts anders, als bestimmte ursprüngliche Acte angibt, die mit einer noch unbestimmten Einheit vorgenommen werden sollen. Man nimmt ferner eine zweyte, völlig beliebige Zahl (den Multiplicand), an, welche als Ausdruck jener noch unbestimmten Einheit gedacht werden soll. Man führt an dieser die Acte aus, welche in jener ersten vorgeschrieben sind und die alsdann arithmetische Operationen werden. Die dadurch erzeugte einfache Zahl, die sich jederzeit auf dieselbe Einheit als der Multiplicand bezieht, wird Product oder Factum genannt. Das Zeichen der Multiplication ist ein ., selten ein ×, zwischen Multiplicand und Multipli-

cator gesetzt; bey Buchstaben ein bloßes Aneinanderrücken *).

Bey ganzen Zahlen wird sie sich folgendermaaßen in Ausübung setzen lassen. Der Multiplicator fordert keine andere Acte an der Einheit, als eine bestimmte Menge von Wiederholungen und ein Zusammenfassen der dadurch gesetzten einzelnen Dinge in einen Inbegriff. Man muß also zuerst den Multiplicator zählend in seine einzelnen Einheiten auflösen, alsdann für jede von ihnen den Multiplicand an die Stelle setzen, und endlich die einzelnen, dadurch hervorgebrachten Zahlen zu einer Summe vereinigen. So setzt also die Multiplication ganzer Zahlen das Addiren schon zum Voraus, insofern einer von den Acten, deren Vollziehung sie fordert, diese Operation nothwendig macht.

Die nachstehenden Folgerungen aus dem allgemeinen Begriffe der Multiplication sind für die Rechnungen mit zusammengesetzten Zahlen von vorzüglicher Erheblichkeit.

1. Besteht der Multiplicand aus Theilen, so darf man jeden davon einzeln mit dem Multiplicator multi-

*) Wollte man den Begriff der Multiplication aus den Ideen reeller Größenbeziehungen entspringen lassen, so würde sie als die Operation, wodurch man aus der Zahl, welche eine Größe durch eine zweyte, und der Zahl, welche die zweyte Größe durch eine dritte ausdrückt, eine neue ableitet, vermöge welcher der Ausdruck jener ersten Größe durch die dritte geleistet wird, bezeichnet werden können. Die Arithmetik hat freilich als Wissenschaft keinen Gewinn von solchen Rückweisungen auf würkliche Größenverknüpfungen, welche streng genommen nur Fragen sind, von denen dahin steht, ob sie dieselben überall beantworten kann.

pliciren, und hernach die Producte in eine Summe zusammenziehn. Dies Verfahren ist auch dann gestattet, wenn unter jenen Theilen subtractive seyn sollten, nur müssen die aus ihnen entsprungenen Producte als subtractiv mit den übrigen verbunden werden.

$$(a + b - c). d = a d + b d - c d.$$

2. Besteht der Multiplicator aus Theilen, so kann man mit jedem von ihnen am Multiplicand die Operation verrichten, und die Producte in eine Summe zusammenziehn. Sind unter diesen Theilen subtractive, so zieht man die Producte, welche aus ihnen entspringen, von denjenigen ab, welche sich aus den nicht subtractiven Theilen des Multiplicators ergeben haben.

$$a. (b + c - d) = a b + a c - a d.$$

3. Bestehn Multiplicand und Multiplicator beyde aus Theilen, so bilde man alle möglichen Producte aus den einzelnen Theilen des einen in die des andern, und vereinige sie zu einem Inbegriff. Wenn in beyden subtractive Theile vorkommen, so werden von den Producten, die, aus nicht subtractiven Theilen entsprungen, sich durch Addition vereinigen müssen, diejenigen, bey denen entweder der partielle Multiplicand, oder der partielle Multiplicator (aber nur einer von beyden zur Zeit) subtractiv war, als abzuziehend anzusetzen seyn; aber die Producte, welche aus der Verbindung eines subtractiven Theiles aus dem Multiplicand, mit einem subtractiven Theile aus dem Multiplicator entstehen, werden zu den übrigen als additiv treten müssen.

$$(a - b). (c - d) = a c - a d - b c + b d.$$

4. Multiplicand und Multiplicator, wenn beyde unbenannte Zahlen sind, dürfen ihre Namen und Geschäfte verwechseln, ohne daß dadurch die Größe des Products

geändert würde. Man setzt den Multiplicand, also jede seiner Einheiten, so oft, als der Multiplicator vorschreibt. Eine Einheit so oft setzen, als der Multiplicator angibt, heißt diesen selbst setzen. Man bekommt also für jede Einheit des Multiplicand den Multiplicator, und in dieser Idee ist die eben angedeutete Verwechslung schon vorgegangen. $a . b = b . a.$ Aus dieser Ursache sagt man von zwey Zahlen: sie werden mit einander multiplicirt, und nennt sie mit einem gemeinschaftlichen Namen Factoren eines Products; ihre Geschäfte bey der Operation beliebiger Wahl überlassend.

5. Um ein Product aus zwey Factoren mit einer dritten Zahl zu multipliciren, kann man den einen Factor desselben mit ihr, und hernach das, was herausgekommen ist, mit dem andern Factor multipliciren.

$$(a\,b)\,c = (a\,c)\,b = (b\,c)\,a.$$

Daraus läßt sich der allgemeine Satz ableiten, daß bey der Bildung eines Products aus beliebig vielen Factoren die Folge derselben für die Größe des Resultats gleichgültig ist.

6. Um eine Zahl mit einem Producte aus mehreren Factoren zu multipliciren, kann man allmälig, erst mit dem einen, dann das daraus entstandene Product mit dem andern, und so fort, multipliciren. $a.(b\,c) = (a.\,b.)\,c.$

7. Wenn Multiplicand und Multiplicator beide aus Factoren bestehn, so darf man auf vielfache Weise die Factoren des einen zu denen des andern gesellen, nur müssen alle Factoren, die in beyden einzeln liegen, im Producte enthalten seyn.

IV. Bey der Division wird eine Zahl, anzusehend als schon vollendetes Product aus zwey Factoren,

gegeben (Dividendus). Der eine von diesen beyden Factoren wird gleichfalls als bekannt angenommen (Divisor). Die Operation besteht in einer Zerlegung des Products, so daß dadurch der zweyte, noch unbekannte Factor, welcher zur Bildung desselben beygetragen hat (der Quotient), gefunden wird. Das Zeichen der Division ist anfangs ein :, zwischen Dividend und Divisor. Sie ist das Umgekehrte der Multiplication.

Es ist unmöglich, die Zerlegung des Products zu vollführen, ehe man die in der Idee des Dividirens im Allgemeinen bezeichnete Art seiner Entstehung genauer bestimmt, und das Geschäft, welches der gegebene Factor (hier Divisor genannt) dabey gehabt haben soll, angegeben hat. Es sind in dieser Rücksicht zwey Fälle gleich möglich. Jener gegebene Factor kann im ersten Fall Multiplicandus bey der Erzeugung dieses Products gewesen seyn. Alsdann muß der andere noch unbekannte Factor die Art und Weise angeben, wie aus jenem ersten durch Zusammensetzung das Product gebildet seyn kann. So erscheint die Division als eine Vergleichung von zwey gleichartigen Zahlen, und soll uns in einer dritten Zahl die Acte darstellen, wodurch aus der einen von ihnen die andere gebildet werden kann. Da wo Dividendus und Divisor als gleichbenannte Zahlen gegeben werden, ist es eben dadurch vorgeschrieben, daß die Division nichts anders als eine solche Vergleichung seyn kann, der Quotient also als unbenannte Zahl erscheinen muß. In diesem Falle haben die gleichen Benennungen des Dividend und Divisor keinen Einfluß auf den Quotienten; dieser bleibt derselbe, wenn jene gleichbenannte Zahlen in unbenannte verwandelt werden. Aber der gegebene Factor des

bekannten Products kann im zweyten Falle auch als gewesener Multiplicator bey dessen Erzeugung gedacht werden. Alsdann ist der Multiplicandus, woraus es sich gebildet hat, unbekannt; man weiß nur die Art, wie aus diesem durch Zusammensetzung eine neue Zahl entstanden seyn soll, und kennt die genannte neue Zahl selbst. Wenn der Divisor, wie wir ihn hier annehmen, eine ganze Zahl ist, so kommt bey der letzten Ansicht die Division auf die Untersuchung zurück: wie groß eine Zahl genommen werden muß, um, so oft zu sich selbst gesetzt, als eine andere gegebene vorschreibt, ein Ganzes von bekannter Größe hervorzubringen; sie ist also alsdann eine Eintheilung in eine vorgeschriebene Menge gleicher Theile, an einem gegebenen Ganzen vollzogen, wodurch die Größe des einzelnen, der ein aliquoter Theil des Dividend seyn wird, gefunden werden soll. Bey angewandtem Rechnen wird sich dieser Fall eben so oft als der vorige ereignen; wenn der Dividend benannt, der Divisor unbenannt ist, kann kein anderer als er statt finden; er läßt immer, wo er eintritt, den Quotienten mit dem Dividend gleichartig werden.

Bey der würklichen Ausübung des Dividirens kann man nicht umhin, folgende drey Fälle zu unterscheiden, welche durch die möglichen Verhältnisse der Größe zwischen Dividend und Divisor gegeben werden.

a. Der Dividend läßt sich in Stücke zerlegen, deren jedes an Menge dem Divisor gleich kommt. Soll alsdann die Division eine Vergleichung zwischen Dividend und Divisor seyn, so hat man nichts nöthig, als, durch wiederholtes Abziehn des letzten, den ersten gänzlich zu erschöpfen, und dabey zu zählen, wie oft sich dieses

Abziehn hat verrichten lassen. Ist hingegen die Division als Eintheilung anzusehn, so muß man vorläufig, noch ehe zur würklichen Theilung geschritten wird, den Dividend in Stücke zerschneiden, deren jedes dem Divisor gleich kommt. Anstatt nun von dem ganzen Dividend auf einmal den Theil zu nehmen, welchen der Divisor fordert, darf man ihn von jedem Stücke des Dividend suchen, und die einzelnen Quotienten, die auf diese Art hervorgegangen sind, zu einer Summe vereinigen. Da jedes von jenen Stücken so viele Einheiten enthält, als der Divisor, so wird es, in so viele gleiche Theile zerlegt, als er verlangt, für den aus ihm entstehenden aliquoten Theil die Einheit selbst geben. Man bekommt also solcher Einheiten so viele in den gesuchten ganzen Quotienten, als Stücke im Dividend enthalten waren. Und so ergibt sich, obwohl aus ganz verschiedenen Gründen, für beyde Arten des Dividirens in diesem Falle die Regel: man zerlege den Dividend durch successives Abziehn des Divisors in Stücke, deren jedes diesem an Menge gleich ist; der Quotient wird so viele Einheiten enthalten, als solcher Stücke im Dividend gefunden sind.

b. Der Dividend ist kleiner als der Divisor. Soll alsdann die Division, als Vergleichung, die Art und Weise angeben, wie sich aus dem letzten der erste durch Zusammensetzung erzeugen läßt, so ist klar, daß aus bloßer Wiederholung des Divisor (als des Größeren), der Dividend (als das Kleinere), nicht erwachsen kann, sondern daß man zuerst eine Zerlegung des Divisor in kleinere unter einander gleiche Theile vornehmen muß, um aus einem davon durch Wiederholung den Dividend zusammenzusetzen. Die unbedingte Möglichkeit der Aus-

führung dieses Verfahrens bey ganzen Zahlen erhellet sogleich. Der Divisor läßt sich allemal in so viele gleiche Theile zerlegen, als er Einheiten enthält, jeder einzelne davon ist die Einheit selbst. Ein solcher läßt sich so oft wiederholen, als Einheiten im Dividend liegen, und nach Vollführung beyder Operationen wird aus dem Divisor der Dividend geworden seyn. Ist aber die Division eine Eintheilung, so wird man hier, wo sich der Dividend nicht in mehrere Stücke, deren jedes dem Divisor an Menge gleich kommt, zerschneiden läßt, auf die einzelnen Einheiten, welche er enthält, zurückgehn müssen. Man wird also von jeder Einheit des Dividend einen solchen aliquoten Theil nehmen, als der Divisor fordert, und diese aliquoten Theile, in einen Inbegriff vereint, werden den gesuchten aliquoten Theil des ganzen Dividend geben. Für beyde Arten des Dividirens also muß der Quotient eine Zahl seyn, welche Zerfällung in so viele gleiche Theile als der Divisor Einheiten enthält, und so vielmaliges Setzen eines solchen, als im Dividend Einheiten liegen, in einem Inbegriff fordert, das heißt ein Bruch, dessen Zähler der Dividend, dessen Nenner der Divisor ist. Auch im ersten Falle läßt sich, nur unbequemer, der Quotient in dieser Form darstellen.

c. Der Dividend ist zwar größer als der Divisor, aber ohne sich durch wiederholtes Abziehn desselben erschöpfen zu lassen. Alsdann läßt er sich aus einem Stücke, welches ein Vielfaches des Divisor, und einem zweyten, welches kleiner als dieser ist, zusammensetzen. So kann der Quotient, durch Anwendung der beyden vorigen Regeln, als ganze Zahl nebst angehängtem Bruche ausgedrückt werden; man darf ihn aber auch,

bloß nach der zweyten Regel, durch einen einzigen Bruch darstellen.

Als Zusätze verdienen die nachfolgenden vorzügliche Bemerkung.

1. Da ein Product mehrerer Factoren durch Multiplication seines einen Factors selbst multiplicirt wird, so ist auch umgekehrt Division eines Factors in einem Producte, Division des Products selbst. Dieser Satz kann auch so ausgesprochen werden: Wenn eine Zahl erst mit einer andern multiplicirt, hernach durch eine dritte dividirt werden soll, so darf man, ohne Schaden des Resultats, die Ordnung dieser Operationen umkehren.

2. Da es einerley ist, ob man mit einem Producte auf einmal, oder mit jedem Factor desselben multiplicirt, so wird es auf Eins herauskommen, ob man mit einem Producte auf einmal, oder mit jedem Factor desselben nach und nach dividiren will. Und so wie die Ordnung multiplicirender Factoren gleichgültig in Ansehung des Products ist, so wird auch die Ordnung, welche man beym Dividiren mit mehreren Factoren beobachtet, keinen Einfluß auf die Größe der Quotienten haben.

3. Wenn man in dem obigen Satze: daß ein Product in seinem einen Factor multiplicirt oder dividirt werden könne, so wie in dem leicht daraus abzuleitenden, daß Multiplication des einen Factors in einem Producte, und gleichzeitige Division des andern mit der nemlichen Zahl, keine Aenderung hervorbringen, die Namen Dividend, Divisor und Quotient, für die von Product und seinen Factoren an die Stelle setzt, so kann man dadurch sechs Sätze ableiten, welche den Einfluß von Multiplicationen und Divisionen, die an Di-

vidend und Divisor vollzogen werden, auf den Quotienten betreffen. Indessen kommen eben diese Sätze, in allgemeinerer Beziehung, unter andern Benennungen, in der Lehre von den Brüchen ausführlich vor.

Zweytes Capitel.

Von der Bildung und Bezeichnung zusammengesetzter Zahlen nach den Regeln der Zahlensysteme, und den Rechnungsarten in Beziehung auf sie.

Nicht allein die große Beschränktheit unserer Phantasie im Auffassen und Festhalten einer beträchtlichen Menge von Dingen, sondern auch die Unfähigkeit unseres Gedächtnisses, sich eine große Zahl von Namen und Zeichen einzuprägen, zwingt uns, bey der Numeration das Verfahren aufzugeben, welches in der theoretischen Idee als das einfachste erscheint. Es erhält nicht jede ganze Zahl ihren eigenthümlichen Namen, und eben so wenig ihr besonderes einfaches Zeichen. Das Zerlegen einer größeren Menge in mehrere kleinere, und das successive Auffassen dieser kleineren Mengen, tritt als einfaches und natürliches Hülfsmittel an die Stelle der ungetheilten Uebersicht des Ganzen; wir bleiben dabey stehn, kleinere Zahlen anzugeben, deren bloß angedeutete Summe die Stelle einer größeren Zahl vertreten soll. Um das Festhalten von jeder kleineren Menge, die wir aus der größeren hervorheben, zu erleichtern, geben wir, so lange es möglich ist, der einen eben so

viele Elemente als der anderen. Alsdann brauchen wir, um sie alle dem Gedächtnisse einzuprägen, nur zu bemerken, wie viele Elemente eine von ihnen enthält, und wie viel ihrer sind. Dabey begnügen wir uns also, statt eines Products, nur die Factoren anzugeben, woraus es erwachsen muß. Auf diesen beyden Kunstgriffen, mit völliger Consequenz durchgeführt, ruht die Bildung jedes sogenannten Zahlensystems, welches auf folgende Art zu Stande kommt.

Man wählt sich eine Menge, die als die größte, durch einen untheilbaren Act des Zählens aufzufassende, angesehn werden soll. Diese völlig willkührliche Zahl wird Grundzahl des Systems genannt; und bekommt, so gut wie alle kleineren, die vor ihr vorher gehn, einen eigenthümlichen Namen. Und nun macht man sich's zur unbedingten Regel, sobald beym Zählen vorkommender Dinge die Menge derselben so groß wird, als jene Grundzahl, diese ganze Zusammenfassung als ein neues Ding einer nächsthöheren Art zu denken, und durch einen eigenen Namen anzudeuten. Im erweiterten arithmetischen Sprachgebrauche heißt Alles Einheit, was in irgend einer Zahl würklich gezählt wird. Wir haben also bey Zahlensystemen einfache Einheiten, so lange wir die ursprünglichen, als nicht zusammengesetzt gegebenen, zählen; Einheiten der ersten Ordnung, wenn wir so viel von jenen, als die Grundzahl des Zahlensystems fordert, in einen Inbegriff zusammennehmen; Einheiten der zweyten Ordnung, wenn wir die nemliche Menge von Einheiten der ersten Ordnung in Eins zusammengefaßt denken; und so können wir zu Einheiten willkührlich höher Ordnungen aufsteigen, von denen jede eigentlich nichts ist, als ein bloß angedeutetes Product

aus Factoren, die alle der Grundzahl des Systems gleich kommen, und deren so viele sind, als der Rang, welchen die vorliegende höhere Einheit haben soll, durch die Menge der seinigen andeutet. In dem gebräuchlichsten Zahlensysteme, dem decadischen, haben auch sie noch besondere Namen erhalten.

Diese Ideen von den höheren Einheiten als entwickelt vorausgesetzt, ist der Gang, den die künstliche Zahlenbildung zu nehmen hat, sehr einfach. Aus den einfachen Einheiten erwachsen allmälig Einheiten der ersten Ordnung; jedesmal, sobald ihre Menge der Grundzahl gleich wird. Diese werden, als einzelne Dinge, in einem besonderen Theile der sich bildenden Zahl, für sich gezählt. Aus ihnen entstehn, so oft sich ihre Anzahl bis zur Grundzahl anhäuft, Einheiten der zweyten Ordnung, und so fort ins Unendliche. Die künstlich zusammengesetzte Zahl enthält auf diese Art mehrere Theile, von denen jeder sich auf eine Einheit anderer Ordnung bezieht als der andere, aber die Mengen, welche von solchen Einheiten würklich gezählt werden, müssen beständig geringer bleiben, als die Grundzahl des Systems. Die Uebersicht dieser einzelnen verschiedenartigen Theile wird dadurch sehr erleichtert, daß man sie immer in der Folge angibt, welche durch die natürliche Rangordnung der in ihnen vorkommenden Einheiten bestimmt wird.

Je größer die Grundzahl eines Zahlensystems, desto geringer muß die Menge der höheren Einheiten werden, die beym Auffassen einer gegebenen Anzahl von Dingen nöthig sind. Aber dafür wächst die Menge und Größe der kleineren Zahlen, die man als einfach anzusehn und mit ursprünglichen Namen zu belegen hat.

Die Bezeichnung künstlich gebildeter Zahlen hat zwey Bedingungen zu erfüllen. Zuerst muß sie jede der kleineren Mengen, welche als einfach gedacht werden sollen, auf eine eigenthümliche Weise andeuten. Die zu dieser Absicht gewählten Zeichen werden Zifern genannt. Zweytens muß sie, für jede solche Menge, den Rang der Einheit, welche in ihr gezählt werden mag, bestimmt darstellen. In der wissenschaftlichen Arithmetik geschieht dies oft dadurch, daß man gerade über eine Zifer ein ausdrückliches Zeichen (Index) setzt, wodurch der Rang ihrer Einheit vorgeschrieben wird. Aber diese Art der Bezeichnung, die bey kleineren Zahlen, und in einzelnen Fällen viele Bequemlichkeit gewährt, würde bey großen, vieltheiligen Zahlen sehr verwickelte Ausdrücke hervorbringen. Der einfachste Weg besteht ohne Zweifel darin: die Folge, in welcher man die einzelnen Theile einer zusammengesetzten Zahl ohnehin angeben muß, beym Schreiben derselben sprechend zu machen, und sich dadurch die ausdrückliche Anzeige ihres Ranges ganz zu ersparen. Sobald von jeder Art der Einheiten, von der höchsten an, die in einer Zahl vorkommt, bis zur niedrigsten hin, würkliche Mengen vorhanden sind, schreibe man die Zifern, wodurch dieselben ausgedrückt werden, in natürlicher Ordnung hinter einander. Alsdann werden hinter jeder Zifer noch so viele Stellen mit andern besetzt seyn, als es niedrigere Ränge hinter demjenigen gibt, welcher in ihr gezählt wird. Man zähle also nur die Menge der nach einer Zifer noch folgenden, so wird man ihren Rang erfahren. Dabey wird freilich das Zeichen der 0 unentbehrlich, welches für sich Abwesenheit der Menge bedeutet, aber doch zur Ausfüllung von Stellen gebraucht werden muß, sobald

in einer zusammengesetzten Zahl nicht von jedem Range zwischen dem höchsten und niedrigsten würklich Mengen vorhanden sind.

Für alle Zahlensysteme gilt die Regel: je mehr Zifern eine Zahl hat, desto größer ist sie; je höher die Stelle, in welcher eine Zahl von einer andern abweicht, desto größer die beyderseitige Verschiedenheit. Denn eine Einheit höhern Rangs beträgt unbedingt mehr, als Alles was in niedrigeren Stellen vorkommen kann.

Zahlensysteme von einer kleineren Grundzahl, als das decadische, bilden und bezeichnen wir ohne alle Mühe, da die im decadischen üblichen einfachen Zifern mehr als hinlänglich für sie sind; aber zur Darstellung solcher, die eine größere Grundzahl als das decadische System besitzen sollen, muß man wenigstens für alle Mengen von Zehn an, bis zur Grundzahl, eigene einfache Namen und Zeichen einführen, wenn man bey jeder Numeration nach derselben Methode verfahren will. Da bey benannten Zahlen wegen der Ungleichförmigkeit, die in der Bildung höherer Einheiten aus niedrigern in der Praxis des gemeinen Lebens statt findet, auch solche Systeme vorkommen, so pflegt man bey der Rechnung mit ihnen, um neuer Zeichen überhoben zu seyn, das einfache Gesetz der Bezeichnung aufzuheben; man schreibt die von jeder Art vorhandenen Mengen mit den Zifern des gewöhnlichen decadischen Systems, auch dann, wenn dazu eine mehrzifrige Zahl nöthig seyn sollte, und deutet den Rang des in jeder solchen Menge gezählten durch eigene, daneben gesetzte Indices an. Am häufigsten kommt in dieser Art das Sexagesimalsystem, nicht selten auch das Duodecimalsystem vor. Die Einführung eines durchgängig nach decadischer Ein-

theilung fortschreitenden Maaßsystems könnte zur Vermeidung aller Weitläuftigkeiten dieser Art am mehrsten beytragen.

Um die vier Hauptoperationen der Arithmetik an künstlich gebildeten Zahlen aus demselben System zu verrichten, ist es nur nöthig die Regeln, welche vorhin für das Verfahren mit zusammengesetzten Zahlen abgeleitet sind, auf diesen bestimmten Fall anzuwenden, und dabey die Bedingung festzuhalten, daß das Resultat auch eine, nach eben dem Gesetze gebildete, Zahl seyn soll. Es ist aber nicht hinlänglich die Momente des Verfahrens aus Gründen zu kennen; der Gebrauch fordert einen vollendeten Mechanismus, dessen Erfindung und Begründung eine besondre Untersuchung nöthig macht.

I. Bey der Addition hat man darauf zu sehn, daß aus den gegebenen Zahlen allemal die Theile zusammengesucht und vereinigt werden, die sich auf gleichhohe Einheiten beziehn, daß aber keine von den daraus erwachsenden Summen mehr als die höchste, unter der Grundzahl des Systems liegende, Menge von Einheiten behalte. Dies wird vollkommen geleistet durch den Mechanismus des Untereinanderschreibens der gegebenen Zahlen, wobey die niedrigsten Zifern derselben in eine Verticalreihe geordnet werden; des Addirens der verticalen Columnen, welches von der niedrigsten anfängt; des Schreibens der entstehenden Summen endlich, so daß die niedrigste Zifer von jeder unter die Verticalreihe aus der sie entspringt, die höheren aber, wenn solche vorkommen sollten, als Theile unter die nächsthöheren verticalen Columnen nach ihrer Ordnung gesetzt, und

mit diesen, so wie das Addiren fortschreitet, vereinigt werden.

II. Bey der Subtraction kommt es hauptsächlich darauf an, daß die Theile des Subtrahend von gleichartigen im Minuend weggenommen werden. So lange jede Zifer des ersten kleiner ist als die correspondirende des letzten, geben sich die Reste von selbst. Aber das ist nicht immer der Fall. Die Bedingung, daß der Minuend den Subtrahend übertreffe, wird erfüllt, sobald er nur entweder mit mehr Zifern geschrieben wird, oder, bey gleichviel Zifern, von oben an gerechnet, zuerst in gleichhoher Stelle eine größere Zifer enthält, als der Subtrahend. Ist das, so kommt nichts darauf an, was in niedrigeren Stellen stehn mag. Es kann sich also ereignen, daß eine Zifer im Minuend kleiner ist als die, welche von ihr weggenommen werden soll. Da muß man, um die Abziehung verrichten zu können, eine Einheit von der nächsthöheren Zifer des Minuend wegnehmen, sie, in ihre nächstniedrigeren Einheiten aufgelöst, zu der vorliegenden hinzufügen, und dann die Abziehung vollführen. Stehn in Stellen des Minuend Nullen, so wird man genöthigt, bis zur nächsten bedeutenden Zifer nach ihnen hinaufzugehn, und durch eine von ihr genommene Einheit die leeren Stellen nach ihr auszufüllen. Das Schreiben des Subtrahend unter den Minuend, so, daß die niedrigsten Zifern in beyden unter einander stehn, erspart das Zusammensuchen gleichartiger Theile; die Reste werden ihrem Range gemäß unter die Zifern gesetzt, woraus sie entsprungen sind; man muß es bey jeder Zifer des Minuend besonders bemerken, wenn sie zum Behuf

einer früheren Subtraction schon um eine Einheit verkleinert ist.

III. Bey der Multiplication muß man im Allgemeinen beyde Factoren als vieltheilige Größen betrachten, mithin nach und nach alle Theile des Multiplicand durch jeden des Multiplicator multipliciren und die Producte in eine Summe bringen. Ist der Theil des Multiplicator, womit man operirt, ein Einer, so darf man jede Zifer des Multiplicand allmälig mit ihm multipliciren, und den Producten eben den Rang beylegen, welchen diese Zifern hatten. Ist er aber von höherer Ordnung, so darf man ihn als Product zweyer Factoren: der Menge, die seine Zifer darstellt, und der höheren Einheit, die sie zählt, betrachten, und dem gemäß erst mit ihm multipliciren, als wenn er ein Einer wäre, nachher aber das Product um den Rang jener höheren Einheit erhöhen. Indem man nach dieser Regel mit jeder Zifer des Multiplicator verfährt, die jedesmaligen Producte in Ansehung ihrer Theile dem Gesetze des Zahlensystems worin gerechnet wird, gemäß zusammenzieht, und sie endlich alle durch Addition vereinigt, muß das ganze gesuchte Product hervorgehn. Offenbar braucht man bey dieser Operation nur die Producte der einfachen Zahlen durch unmittelbare Multiplication zu finden; weswegen man ihren Inbegriff unter dem Namen des Einmaleins dabey als bekannt vorauszusetzen pflegt. Das gewöhnlichste mechanische Verfahren schreibt vor: so viele Schichten von Producten anzulegen, als der Multiplicator Zifern enthält, so daß jede Schicht ein Partialproduct aus dem ganzen Multiplicand in eine einzelne Zifer des Multiplicator

darstellt, wobey zuerst mit der letzten Zifer des Multiplicator und hernach eben so mit jeder folgenden in ihrer Ordnung, von unten herauf, verfahren wird. Jede von den Productenschichten, welche auf solche Art aus einer Zifer des Multiplicator entsteht, muß mit ihrer untersten Stelle genau unter jene Zifer gesetzt, und alle müssen in dieser Stellung durch Addition verbunden werden. Man kann sich aber durch einige Uebung auch gewöhnen, durchaus von oben herab in der Bildung jeder Schicht von Producten, die aus den successiven Zifern des Multiplicator, auch diese von oben herab allmälig zugezogen, entstehn, zu verfahren, und dies ist für Berechnungen erleichternd, bey denen Alles in der Rechnung entstehende, was unter die Stelle eines beliebig gewählten niedrigeren Ranges hinabgeht, als nicht vorhanden angesehn werden soll.

Man kann überhaupt für die Menge von Zifern, welche in einem Producte liegen müssen, sobald die Menge der Zifern in den Factoren gegeben ist, bestimmte Grenzen festsetzen. Zum Behuf der Division ist es besonders wichtig, für den Fall, da der eine Factor ein Einer ist, zu bemerken, daß das Product höchstens eine Zifer mehr enthalten kann, als der andre Factor, und daß in diesem Fall das Product, nach Absonderung seiner niedrigsten Zifer, eine kleinere Zahl darstellen muß, als eben jener andere Factor.

IV. Bey der Division zerlegt man den Dividend in solche Theile, daß jeder, indem er mit dem gegebenen Divisor dividirt wird, zum Quotienten eine Zifer von irgend einem bestimmten Range geben muß, und einen Rest von gleichem Range zurücklassen kann. Hier

kann man nicht anders als von oben anfangen; man schneidet am Dividend eben so viel Zifern, als der Divisor enthält, ab, wenn diese schon eine größere Zahl geben, als der Divisor ist, sonst aber noch eine mehr, und sucht die Zifer, deren Product mit dem Divisor diesem Theile am nächsten kommt. Sie ist die höchste des Quotienten, und vom Range des dividirten Theils. Nachdem das Product dieser Zifer in den Divisor von dem vorliegenden Theile abgezogen ist, sind zur ferneren Division: der Rest, welcher bey der Abziehung geblieben, nebst dem noch unberührten Stücke des Dividend, vorhanden. Damit kann man wieder wie vorhin verfahren, indem man ein Stück davon abschneidet, welches, um eine Stelle tiefer herab gehend als das vorige, zum Quotienten nur eine einfache Zifer geben kann. Auf gleiche Weise läßt sich fortgehn, bis man an einen übrig bleibenden Theil kommt, welcher kleiner ist als der Divisor, folglich, als letzten Theil des Quotienten, einen Bruch an die Hand gibt. Der Mechanismus bey der Division, vermöge dessen zu jedem Reste nur die höchste Zifer des noch unberührten Theils im Dividend genommen, und daraus eine neue Zifer des Quotienten gesucht wird, die aber allemal, selbst wenn sie eine 0 seyn sollte, gleich hinter die nächstvorhin gefundene gesetzt werden muß, weiset sogleich jeder Zifer des Quotienten ihren gebührenden Rang, denselben, bis zu welchem das jedesmalige abgeschnittene Stück des Dividend herabgegangen ist, an.

Man braucht bey diesem Verfahren durch unmittelbare Division nichts weiter zu erforschen, als dasjenige, aus dem Divisor und einer einfachen Zifer gebildete Vielfache, welches dem Theile des Dividend, den man

betrachtet, am nächsten kommt. Der gewöhnliche Mechanismus nimmt dabey meistens die Form eines Errathens an, weil er die Mühe scheut, alle Vielfache aus dem Divisor und einer einfachen Zifer vorläufig zu berechnen.

Ein abgekürztes Dividiren, wobey Alles in den aus der Rechnung hervortretenden Zahlen weggelassen werden soll, was unter einen gewissen Rang hinabgeht, findet leicht seine Regel.

Drittes Capitel.

Die Rechnungsarten mit Brüchen.

A. Begriff von einfachen Brüchen und ihren Arten.

Da, wo man eine Größe nicht unmittelbar durch die Einheit selbst wiederholend zusammensetzen will, oder kann, ist das einfachste Mittel ihrer messenden Auffassung: vermöge des zweyten ursprünglichen Acts, worauf alle Zahlenbildung beruht, die Einheit in eine bestimmte Menge gleicher Theile zu zerlegen, und alsdann, kraft des ersten, aus einem solchen durch wiederholtes Setzen die Vielheit jener Größe zu erzeugen. Diese beyden Acte, zu einer Bestimmung vereint, bringen den einfachen Bruch hervor, zu welchem also zwey ganze Zahlen gehören: der Nenner, welcher die Menge gleicher Theile bestimmt, worin die Einheit zerlegt werden soll; der Zähler, welcher angibt, wie oft ein solcher Theil wiederholt werden muß, damit die Größe, deren Ausdruck gefordert wird, hervorgehe. Beyde Zahlen, in so fern sie zu dem Bruche zusam-

mengehören, zählen also das nemliche Ding, einen gewissen Theil der Einheit, nur in ganz verschiedener Absicht. Der Nenner zählt es, um eben dadurch, daß er angibt, wie oft es gesetzt werden muß, wenn die Einheit hervorzubringen ist, seine Größe zu beschreiben; der Zähler hingegen, um vermöge der Angabe, wie oft es genommen werden soll, damit die zu bestimmende Größe entstehe, von eben dieser Größe einen mittelbaren Begriff zu geben. In diesem Sinne darf man also sagen, daß Zähler und Nenner eines Bruchs gleichbenannte Zahlen, und Repräsentanten der durch den Bruch selbst darzustellenden Größe und der Einheit sind.

Daß ein Bruch bey bestimmtem Nenner durch Vergrößerung des Zählers über jede Grenze wachsen; bey bestimmtem Zähler durch Zunehmen des Nenners unter jede Grenze herabsinken kann, folgt aus seinem Grundbegriffe.

Bey den Regeln für die Division ganzer Zahlen ist in Beziehung auf Brüche der merkwürdige Satz vorgekommen, daß sie Ausdrücke von Quotienten ganzer Zahlen werden können, den Zähler als Dividend, den Nenner als Divisor gedacht. Aber man wird durch Hülfe dieses Satzes nicht die Lehre von den Brüchen auf die von ganzen Zahlen zurückbringen können, denn die Idee eines Quotienten ist eine zusammengesetzte, die entwickelt, und auf die einfachste Form zurückgeführt, in geeigneten Fällen erst in der Vorstellung des Bruchs ihre Auflösung findet. Man pflegt ebendeswegen angedeutete Quotienten sehr häufig sogleich als Brüche zu schreiben, und so wird das ursprüngliche Divisionszeichen seltener, als die der übrigen arithmetischen Operationen gebraucht.

Jede würkliche Zahl ist entweder ganze Zahl oder Bruch. Die Form einer Zahl angeben, heißt bestimmen, welchen Nenner, 1 nicht ausgeschlossen, sie führt.

Es ist übrigens durchaus nicht erforderlich, daß eine Größe kleiner als die Einheit sey, damit sie durch einen Bruch ausgedrückt erscheine; die Form des Bruchs kann jede Größe darstellen. Was sich durch die Einheit selbst in Wiederholungen derselben zusammensetzen läßt, wird sich durch jeden, diese Einheit genau messenden Theil gleichfalls geben lassen. Was namentlich durch eine ganze Zahl ausgedrückt ist, kann ohne Schaden seines Werthes auf unzählige Arten auch in einem Bruche dargestellt werden, weil man sich den Nenner eines solchen Bruches willkührlich vorschreiben lassen darf. Um eine ganze Zahl in einen Bruch von beliebigem Nenner zu verwandeln, werde sie zuerst mit dem künftigen Nenner multiplicirt, die Division hingegen, wodurch diese Veränderung wieder gehoben wird, bloß angedeutet, indem man den Dividend zum Zähler, den Divisor zum Nenner eines Bruchs macht, und die geforderte Umgestaltung wird geschehn seyn. Auf diese Art gibt es unechte Brüche, die etwas Größeres als die Einheit ausdrücken, bey denen also der Zähler größer seyn muß als der Nenner; echte Brüche, die etwas Kleineres als die Einheit bezeichnen, mithin einen Zähler, welcher kleiner ist als der Nenner, besitzen müssen.

B. Verknüpfungen zwischen einem Bruche und einer ganzen Zahl.

Die Begriffe der Rechnungsarten sind allgemein, müssen also bey Brüchen eben so gut, wie bey ganzen

Zahlen, ihre Anwendung finden. Es liegt jedoch in der Natur der Sache, daß man zuerst Verknüpfungen zwischen ganzen Zahlen und Brüchen auszuführen im Stande seyn muß, ehe man Brüche und Brüche mit einander verbinden kann.

1. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl durch Addition vereinigt werden, so ist die erste Bedingung, der die ursprüngliche Form beyder nicht entspricht, daß in ihnen ein und dasselbe Ding gezählt werde. Nun kann in der Regel der Bruch nicht die Form einer ganzen Zahl annehmen, aber wohl kann unbedingt die ganze Zahl sich in einen Bruch umgestalten. Ja man darf diesem Bruche denselben Nenner unterlegen, welchen der zur Vereinigung mit der ganzen Zahl gegebene Bruch besitzt. Ist dies geschehn, so sind es zwey Brüche gleicher Benennung, die man in eine Summe ziehn soll, zwey Mengen also, von denen jede denselben Theil der Einheit zählt wie die andere. Man braucht also nur diese, wie bey ganzen Zahlen, zusammenzuzählen, und am Ende zu bemerken, daß in der Summe noch der vorige Theil der Einheit gezählt werde. Daher die Regel: man verwandle die ganze Zahl in einen Bruch, denselben Nenner führend als der, mit dem sie summirt werden soll, addire die Zähler dieser Brüche, und gebe der Summe den vorigen Nenner als solchen wieder.

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}.$$

2. Sind die zum Behuf der Subtraction gegebenen Zahlen eine ganze und ein Bruch, so ist dieselbe vorläufige Verwandlung mit der ganzen Zahl nöthig.

Die Zähler der beyden alsdann vorliegenden, gleiche Nenner führenden Brüche stellen Mengen dar, in denen der nemliche Theil der Einheit gezählt wird; man rechnet also von der größeren dieser Mengen die kleinere ab, nicht vergessend, daß in der zurückbleibenden noch immer der vorige Theil der Einheit gezählt wird. Die Regel lautet also: man bringe die ganze Zahl auf den Nenner des Bruchs; ziehe dann vom Zähler des Minuend den des Subtrahend ab, der Rest ist Zähler eines neuen Bruchs, dem der vorige Nenner wiedergegeben wird.

$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}; \quad \frac{b}{c} - a = \frac{b - ac}{c}.$$

3. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so ist der natürlichste Weg, welcher sich in der Addition mehrerer gleichen Brüche, als wodurch die Multiplication des gegebenen mit einer ganzen Zahl vollzogen werden kann, von selbst darbietet: bey unberührtem Nenner den Zähler des Bruchs mit jener ganzen Zahl zu multipliciren. $\frac{a}{c} \cdot c = \frac{ac}{b}$. Aber bey Brüchen ist noch eine andere Art die Multiplication auszuführen, wenigstens in gewissen Fällen, möglich. Nicht bloß Vervielfachung der Menge von Theilen, woraus ein Ganzes besteht, sondern auch Vergrößerung des einzelnen Theiles in eben dem Maaße, mit Beybehaltung der von solchen Theilen vorhandenen Menge, ist eine Vervielfachung des Ganzen. Nun ist es der Nenner des Bruchs, welcher uns die Größe der in ihm gezählten Theile anzeigt, und zwar dadurch, daß er uns sagt, wie viele solcher Theile nöthig sind, um

die Einheit zusammenzusetzen. In eben dem Maaße, als ein solcher Theil größer wird, braucht er wenigere Male gesetzt zu werden, damit die Einheit herauskomme; dadurch also, daß man den Nenner eines Bruchs um ein gewisses Vielfaches kleiner macht, wird angedeutet, daß der Theil der Einheit, welcher in dem Bruche gezählt wird, um eben dieses Vielfache größer geworden ist. Um daher einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren, dividire man, mit Beybehaltung des Zählers, seinen Nenner durch sie. Diese Regel ist indessen nur dann anwendbar, wenn jene Division eine ganze Zahl zum Quotienten gibt, denn Zähler und Nenner des neuen Bruches sollen auch ganze Zahlen seyn.

Wenn eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden soll, so kommt es, dem Begriffe der Multiplication gemäß, nur darauf an, die Acte, wodurch der Bruch sich aus der Einheit bildet, an jener Zahl in Ausübung zu setzen. Diese Acte bestehn erstlich in einer Zerlegung in so viele gleiche Theile, als der Nenner vorschreibt: man muß also jene Zahl durch den Nenner des Bruchs dividiren; zweytens in dem so oftmaligen Setzen eines solchen Theiles, als der Zähler des Bruchs angibt: man muß also das Resultat jener Division mit dem Zähler des Bruchs multipliciren. Da sich in den meisten Fällen die eben genannte Division nur durch Zurückführung des Quotienten auf einen Bruch leisten lassen wird, die Multiplication dieses Bruchs aber in der Regel nur durch Multiplication seines Zählers, so ergibt sich die allgemeine Vorschrift: man mache das Product aus der ganzen Zahl und dem Zähler des sie zu multipliciren bestimmten Bruchs zum

Zähler, seinen Nenner aber zum Nenner eines neuen Bruchs. $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$. Ist der Bruch ein Stammbruch, d. h. hat er 1 zum Zähler, so löst sich das Multipliciren mit ihm in ein bloßes Dividiren durch seinen Nenner auf, wodurch ein aliquoter Theil des Multiplicand erhalten wird. Solche Brüche pflegen selbst Quoten genannt zu werden. Auch hier ist es, diesen Sätzen zufolge, erlaubt, Multiplicand und Multiplicator zu verwechseln, ohne daß die Größe des Productes geändert wird.

4. Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren ist, so kann man, den bey der Multiplication angestellten Betrachtungen zu Folge, ohne den Nenner zu berühren, durch bloße Division des Zählers mit dem gegebenen Divisor das Gesuchte erhalten. Aber da sich diese Division nur zuweilen so ausführen läßt, daß der Quotient eine ganze Zahl wird, so gelangt man auf diesem Wege zu keiner allgemeinen Regel. Es gibt indessen noch ein anderes Mittel. Vervielfachung des Nenners, ohne Aenderung des Zählers ist verhältnißmäßige Verkleinerung des in dem Bruche gezählten Theiles der Einheit, und also gleichmäßige Verringerung des Werthes, den der Bruch selbst besitzt. Man multiplicire also den Nenner des Bruchs mit der gegebenen Zahl, und man wird den Bruch durch sie dividirt haben. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Wenn endlich eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden soll, so ergibt sich aus den Regeln der Multiplication an und mit einem Bruche, verbunden

mit der Definition des Dividirens: daß es in einer Aufhebung der beym Multipliciren vorgenommenen Operationen besteht, sogleich die Vorschrift, wonach der Quotient hervorgebracht werden kann. Ein Product, dessen einer Factor ein Bruch, der andere eine ganze Zahl ist, wird erhalten, wenn man jene ganze Zahl mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt, durch den Nenner desselben dividirt. Rückwärts also, um das wieder aufzuheben, was der Bruch zur Bildung des Productes beygetragen hat, muß man mit dem Zähler desselben dividiren, und durch den Nenner multipliciren; kürzer: den Bruch umkehren, und dann mit ihm multipliciren.

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

C. Erweiterte Gestaltung der Brüche.

Aus den vorhergehenden Regeln ergibt sich die Möglichkeit, einen Bruch, ohne Schaden seines Werthes, in unzählig vielen Formen darzustellen. Zähler und Nenner dürfen zugleich mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden; das Eine ist Multiplication, das Andere Division durch sie, an dem Bruche selbst vollzogen, und beyde Operationen heben einander auf. Freylich wird durch eine solche Veränderung die Gestalt des Bruchs unbequemer, indessen kann es doch Fälle geben, wo sie unvermeidlich ist. Dies tritt namentlich ein, sobald zwey oder mehrere Brüche von beliebig verschiedenen Nennern, als Zahlen, in denen der nemliche Theil der Einheit gezählt wird, dargestellt, das heißt, auf einerley Nenner gebracht werden sollen. Diesen Zweck zu erreichen, verwandelt man jeden der gegebenen

Brüche, durch Multiplication des Zählers und Nenners mit eben derselben Zahl. Diese Zahl muß aber für jeden besonders gebildet werden; die Brüche, welche noch neben demjenigen, der verwandelt werden soll, vorhanden sind, müssen sie hergeben; sie kann, weil Multiplication die einzige Operation ist, wodurch man andere Zahlen mit dem Nenner eines Bruchs verknüpfen, und also diesen ändern kann, so daß, unter dem Vorbehalt am Zähler Gleiches vorzunehmen, der Werth des Bruchs nicht gestört wird, nichts Anderes als ein Product aus den Nennern aller übrigen Brüche seyn. Wenn man ein solches Product wirklich bildet, und damit erst den Zähler, hernach den Nenner des jedesmal vorliegenden Bruchs multiplicirt, so ändert sich sein Werth nicht, es wird in den neuen Formen jeder Nenner ein Product aus allen einzelnen Nennern der anfangs vorhandenen Brüche seyn. Daher die abgekürzte Regel: Wenn mehrere Brüche auf einerley Nenner gebracht werden sollen, so multiplicire man den Zähler jedes einzelnen mit einem Producte aus den Nennern der neben ihm vorhandenen Brüche; dadurch erhält man allmälig die Zähler der neuen, welche sämmtlich ein Product aus allen anfänglich vorhandenen Nennern zu den ihrigen bekommen. In einzelnen Fällen läßt dieses Verfahren noch Abkürzungen zu.

Umgekehrt wird es also auch gestattet seyn, Zähler und Nenner eines Bruchs durch dieselbe Zahl zu dividiren, nur daß dabey die Quotienten als ganze Zahlen erscheinen müssen. Da diese Aenderung der Form dem Bruche eine einfachere Gestalt gibt, so nimmt man sie gern vor, wenn nicht andere Rücksichten daran hindern, welches freylich meistens der Fall zu seyn pflegt. Ein



Bruch heißt in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, wenn sein Zähler und Nenner nicht mehr durch eben dieselbe ganze Zahl so dividirt werden können, daß die Quotienten selbst wieder als ganze Zahlen erscheinen; die Bewerkstelligung dieser Operation setzt also die Möglichkeit voraus, für zwey beliebige Zahlen, wie hier Zähler und Nenner sind, den größten gemeinschaftlichen Divisor zu finden. Diese Möglichkeit ist freylich nicht immer vorhanden. Zähler und Nenner eines Bruchs können absolute Primzahlen seyn, das heißt solche ganze Zahlen, die durchaus nicht als das Product anderer kleinerer ganzen Zahlen angesehn werden dürfen, und alsdann ist die genannte Aenderung unmöglich; sie können, einer oder beyde, aus Factoren zusammengesetzt seyn, und dennoch eine solche nicht gestatten. Durch methodisch angestellte Versuche kann man darüber sichere Auskunft erhalten. Man fängt an, die größere unter beyden Zahlen, a, durch die kleinere, b, selbst zu dividiren. Wenn dabey kein Rest bleibt, so ist offenbar jene kleinere selbst die gesuchte Zahl. Widrigenfalls besteht die größere aus zwey Stücken, deren eines ein Vielfaches des Divisor, das andere kleiner als er ist, $a = mb + c$. Das gesuchte gemeinschaftliche Maaß muß also zwey Bedingungen erfüllen. Es muß erstlich im Divisor, b, aufgehn, und zweytens in dem letzten Stücke des Dividend, c, da es im ersten, welcher ein Vielfaches des Divisor ist, mb, von selbst aufgehn wird. Die Frage ist also jetzt auf die viel einfachere zurückgebracht: welches ist das größte gemeinschaftliche Maaß für die kleinere Zahl, b, und den Rest, welcher bey der Division der größeren durch sie übrig bleibt, c? Mit diesen beyden Zahlen kann man wieder wie mit

den vorigen verfahren, und so fort, wobey, weil man zu immer kleineren Zahlen gelangt, die Untersuchung zuletzt auf ein bestimmtes Resultat führen muß. Und so rechtfertigt sich die gewöhnliche Regel: Um das größte gemeinschaftliche Maaß zweyer Zahlen zu finden, dividire man die größere durch die kleinere, diese selbst wieder durch den Rest, der dabey geblieben ist, und so fort jeden folgenden Divisor durch den Rest, welchen er gelassen hat; der Rest, welcher zuerst die Division aufgehn läßt, ist das gesuchte gemeinschaftliche Maaß. Es gibt keines, wenn der letzte Rest, wozu man gelangt, 1 ist.

D. Verknüpfungen zwischen Brüchen.

Nach diesen Vorbereitungen können die Rechnungsarten, in so fern durch sie mehrere Brüche mit einander verknüpft werden sollen, ohne Schwierigkeit verstanden werden.

I. Die Addition gegebener Brüche, das heißt ihre Vereinigung zu einem einzigen, setzt voraus, daß sie alle gleiche Nenner haben, und wird verrichtet, indem man die Summe aller ihrer Zähler zum Zähler eines neuen Bruches macht, welcher den Nenner behält, den die Theile hatten.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

II. Die Subtraction eines Bruchs von einem anderen erfordert ebenfalls Identität der Nenner, und geschieht dadurch, daß man die Differenz der Zähler

zum Zähler eines neuen Bruchs macht, dessen Nenner der vorige bleibt.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}.$$

III. Die Multiplication einer Zahl mit einem gegebenen Bruche wird vollbracht, indem man an ihr dieselben Acte vornimmt, durch welche der Bruch aus der Einheit entstand, das heißt, indem man sie durch seinen Nenner dividirt, und den Quotienten durch seinen Zähler multiplicirt. Ist der Multiplicand selbst ein Bruch, so läßt sich die Art, wie diese Operationen an ihm vollzogen werden, noch näher bezeichnen. Im Allgemeinen kann es jedesmal geschehn, indem man seinen Nenner mit dem Nenner, seinen Zähler mit dem Zähler des Multiplicator multiplicirt; in besonderen Fällen gibt es noch andere, und kürzere Methoden.

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Die Multiplication durch einen echten Bruch verkleinert, sie kann, was auch der Multiplicand sey, das Product zu jeder Kleinheit herabdrücken, wenn man nur den Nenner des Multiplicator nach Belieben groß annehmen darf. Das Product zweyer echten Brüche ist kleiner als jeder seiner Factoren. Von unechten Brüchen gilt der umgekehrte Satz. Ein Product, dessen Factoren zwey Brüche sind, von denen der eine das Umgekehrte des anderen ist, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$, gibt 1.

IV. Die Division mit einem Bruche erfordert, als eine Auflösung des durch Multipliciren Hervorge-

brachten, gerade das Entgegengesetzte der Operationen, die diese vorschreibt, also Multiplication mit seinem Nenner, und Division des Products mit seinem Zähler. Die Regel des Verfahrens läßt sich am kürzesten so fassen: Multiplication mit dem umgekehrten Bruch ist Division durch den Bruch selbst.

$$\left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Alle Folgerungen, welche in Rücksicht auf das Rechnen mit Andeutungen zusammengesetzter Zahlen aus dem Begriffe der Rechnungsarten für ganze Zahlen abgeleitet sind, lassen sich auf Brüche ausdehnen, gelten also von Zahlen überhaupt.

Wenn man den Begriff eines Bruchs, etwas allgemeiner als vorhin, so faßt, daß zwey Zahlen dazu erfordert werden, von denen die eine, der Nenner, das bestimmt, was eigentlich in dem Bruche gezählt wird, indem sie die Art und Weise angibt, wie es gesetzt werden muß, um die Einheit zu erhalten, während die andere, der Zähler, anzeigt, auf was für eine Art eben dasselbe gesetzt werden muß, um die Größe zu bekommen, welche der Bruch ausdrücken soll, so lassen sich auch zusammengesetzte, oder sogenannte Bruchsbrüche, bey denen die Zähler und Nenner selbst Brüche sind, erklären. Indessen leitet sich aus der eben gegebenen Erklärung leicht der Satz ab, daß ein solcher Bruch eben so gut als ein einfacher, einem Quotienten gleichbedeutend sey; seine verwickelte Gestalt verschwindet, sobald man den Zähler wirklich durch den Nenner dividirt. Es sind also keine besondere Regeln der Rechnung für diese Brüche nöthig, die übrigens ganz wie die vorigen ausfallen würden.

Eine besondere Art von Brüchen, bey deren Bildung ein mit dem decadischen Zahlensystem in naher Beziehung stehendes Gesetz herrscht, und die im Gebrauche verschiedene Abkürzungen des Verfahrens gestatten, stellt das folgende Capitel dar, als eine Anwendung von der allgemeinen Theorie der Brüche.

Viertes Capitel.

Von den Decimalbrüchen.

1. Begriff und Bezeichnung der Decimalbrüche.

Ein Decimalbruch heißt derjenige, dessen Nenner irgend eine von den höheren Einheiten des decadischen Systems, also entweder Zehn, oder ein Product aus lauter Zehnen ist. Man kann zusammengesetzte Decimalbrüche von einfachen unterscheiden; bey den ersten ist der Zähler eine vielzifrige Zahl, bey den andern ein bloßer Einer. Ein zusammengesetzter echter Decimalbruch läßt sich in so viel einfache zerfällen, als sein Zähler Zifern enthält.

Eben diese besondere Beschaffenheit der Nenner macht die Rechnung mit solchen Brüchen um Vieles leichter als mit anderen. Ja, man kann, durch eine geringe Erweiterung der Regel für das Schreiben decadisch gebildeter Zahlen, das ausdrückliche Hinsetzen der jedesmaligen Nenner ganz ersparen. Man hebe nemlich die Annahme, daß die Einer allemal die letzte Stelle einer vielzifrigen Zahl einnehmen sollen, wieder auf, führe aber, damit die Stelle derselben doch erkannt werden könne, ein eigenes Zeichen ein, (man hat ein

(,) dazu gewählt), welches hinter die Zifer der Einer gesetzt wird. Bleibt nun das Gesetz der Rangfolge unter den Zifern unbedingt gültig, welchem gemäß das jeder folgenden Zifer Gezählte um das Zehnfache geringer ist als in der vorhergehenden, so werden Zifern, die nach der Stelle der Einer stehn, wenn man ihren wahren Werth angeben will, durch ein Product von so viel Zehnen, als ihr Index andeutet, dividirt werden müssen, mithin eigentlich einfache Decimalbrüche vorstellen. Bey dieser Methode schreibt man also bloß die Zähler, und schließt auf die Nenner aus den Stellen, in welchen die Zähler stehn. Es kommt dabey Alles darauf an, daß die Stelle der Einer durch das angenommene Zeichen festgelegt werde; von ihr aus bestimmen sich die Plätze aller übrigen Zifern, sowohl derer, die durch ein Product von lauter Zehnen multiplicirt, als derer, die durch ein solches dividirt werden müssen, wobey man zuweilen des Zeichens 0 zur Ausfüllung gewisser Stellen nicht entbehren kann. Die Verrückung dieses Zeichens ist von wesentlichem Einfluß auf die Zahl; jede Zifer derselben wird mit Zehn multiplicirt, indem es um eine Stelle weiter hinuntergeht, mit Zehn dividirt, indem man es um eine Stelle höher hinaufrückt. Hieraus ergibt sich sogleich die Regel, nach der man verfahren muß, wenn man einen durch Hülfe dieses Verfahrens ausgedrückten Decimalbruch wieder auf die gewöhnliche Weise schreiben will. Man rückt das Komma bis hinter die letzte Zifer, wo es ganz weggelassen werden kann; der Nenner zu diesem Zähler ist eine höhere Einheit, deren Rang mit der Zahl der Stellen, um die das Komma verrückt ist, zusammenfällt.

In der Folge wird immer vorausgesetzt, daß ein Decimalbruch auf die angegebene abgekürzte Art geschrieben werde, und die Regeln der Rechnung für Decimalbrüche, deren es sonst keiner mehr bedürfte, haben bloß einen Mechanismus zur Absicht, wodurch dem Resultat der Operationen, die mit solchen Brüchen angestellt werden, sogleich dieselbe Form zu Theil wird.

B. Die Grundoperationen mit Decimalbrüchen.

I. Bey der Addition von Zahlen, die ein Komma führen, wird das Zusammenordnen gleichartiger Theile durch das Untereinandersetzen dieser Zahlen, so daß dabey die Einer (oder die Kommata) in eine Verticalreihe fallen, auf einmal verrichtet. Uebrigens verfährt man genau wie bey der Addition ganzer Zahlen.

II. Bey der Subtraction ist völlig derselbe Fall und dieselbe Regel; eine Zifer, sie stehe vor oder nach den Einern, zählt allemal Etwas zehnfach höheres als die folgende; deswegen verhält man sich bey dem Uebertragen aus einer partiellen Summe in die nächsthöhere, wenn es nöthig seyn sollte, eben so wie bey ganzen Zahlen.

III. Bey der Multiplication sieht man die gegebenen Zahlen an, als wären sie ganze, berechnet ihr Product, zählt alsdann die Menge der Zifern, die in jeder nach dem Komma stehn, addirt die Anzeiger dieser Mengen zusammen, und setzt im Product das Komma so, daß so viele Stellen auf dasselbe folgen, als jene Summe anzeigt. Man muß sich erinnern, daß

hier das Product zweyer Brüche gemacht wird, deren Nenner höhere Einheiten sind, und daß das Product von solchen selbst wieder eine höhere Einheit wird, deren Ordnung die Summe von den Ordnungen der Factoren ist.

IV. Bey der Division betrachtet man ebenfalls Dividend und Divisor als ganze Zahlen, und findet wie gewöhnlich den Quotienten, nur, daß man sich hier mit einer Näherung begnügt, und den letzten Rest, der noch einen echten Bruch in den Quotienten bringen würde, fallen läßt. Nun zählt man die Menge der Stellen nach dem Komma, im Dividend sowohl als im Divisor. Ist sie im ersten größer als im letzten, so rückt man im Quotienten das Komma um so viel Stellen von seiner letzten Zifer hinaufwärts, als der Unterschied jener Mengen anzeigt. Ist aber die Menge der Stellen nach dem Komma im Divisor größer als im Dividend, so rückt man das Komma im Quotienten um so viele Stellen nach seiner niedrigsten Zifer hinunter, als die Differenz eben jener Mengen Einheiten enthält, wobey also die fehlenden Stellen mit 0 ausgefüllt werden müssen. Der Grund dieser Regel leuchtet ein, sobald man sich erinnert, daß ein Bruch durch einen andern dividirt wird, indem man den Divisor umkehrt, und damit multiplicirt. Damit kommt der Nenner des Divisor als Factor in den Zähler des Quotienten, und kann gegen den Nenner des Dividend, weil beyde höhere Einheiten sind, entweder ganz oder nur zum Theil aufgehoben werden, welches, wenn es ausgeführt wird, gerade auf die vorige Regel führt.

C. Verwandlung anderer Brüche in Decimalbrüche.

So bequem der Gebrauch der Decimalbrüche bey würklichen Rechnungen ist, so eingeschränkt würde er seyn, wenn man nicht Mittel hätte, jeden anderen Bruch in einen Decimalbruch umzuformen. Die Möglichkeit davon ist in gewissen Fällen leicht einzusehen. Man multiplicire den Zähler des Bruchs mit einer beliebig gewählten höheren Einheit und dividire dies Product durch den Nenner. Da kann sehr wohl der Quotient eine ganze Zahl werden, und wenn man ihm, als Zähler, jene höhere Einheit zum Nenner gibt, so erscheint der vorige Bruch als Decimalbruch. Aber in den wenigsten Fällen läßt sich dies Verfahren würklich ausführen. Jede höhere Einheit, sie sey von welchem Grade sie wolle, ist ein Product aus den Factoren 2 und 5; enthält also der Nenner des gegebenen Bruchs noch andere Factoren, so läßt sich das Product aus ihr und dem Zähler dieses Bruchs nicht mit ihm dividiren, so daß der Quotient eine ganze Zahl würde, wie es doch von dem Zähler eines Decimalbruchs verlangt wird.

Hier tritt zuerst der Fall ein, wo man sich statt der völligen Schärfe mit einer Näherung begnügen muß; wie in allen Fällen, wo wir die abstracten Begriffe der Wissenschaft auf die Wirklichkeit anwenden, unsere Größenbestimmungen nichts Anderes als Näherungen werden, die nicht über eine, von der jedesmaligen Natur der vorliegenden Größe abhängige Kleinheitsgrenze hinausgetrieben werden können, so daß unsere Erkenntniß den höchsten Grad erreichbarer Genauigkeit hat, wenn wir die engsten bestimmbaren Grenzen an-

geben können, zwischen denen die zu bestimmende Größe enthalten ist, oder wenn wir uns überzeugt halten dürfen, dasjenige, was in der Angabe für dieselbe fehlen oder überhaupt unrichtig seyn mögte, betrage weniger als eine, nach Umständen festzustellende, Kleinheitsgrenze, welche gewöhnlich durch einen Decimalbruch, dessen Zähler die Einheit ist, ausgedrückt zu werden pflegt. Die Decimalstelle der Kleinheitsgrenze ist dem gemäß diejenige, welche durch ihren Nenner die höchste Anzahl von Theilen zeigt, in die wir die Einheit zerlegt denken dürfen, wenn solche Theile erkennbar bleiben sollen.

Um einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch näherungsweise zu verwandeln, setze man hinter seinen Zähler ein Komma, und dann so viele 0, daß die letzte derselben in die Decimalstelle der Kleinheitsgrenze kommt. Darauf dividire man ihn durch den Nenner vollständig; lasse aber den echten Bruch, welcher bey strenger Berechnung, gebildet aus dem Reste und dem Divisor, übrigens vom Range des Restes, schließlich angehängt werden müßte, falls genau gerechnet werden sollte, ganz weg, weil sein Werth unter die Kleinheitsgrenze sinkt. Der Quotient wird alsdann den genäherten Ausdruck für den gegebenen Bruch, in verlangter Form, darbieten. Sobald die Entwicklung auf mehr Decimalstellen getrieben werden soll, als der anfängliche Nenner Einheiten hat, muß sich in den Zifern des Quotienten eine periodische Wiederkehr ergeben, welche meistens schon bey einer geringeren Zahl solcher Stellen hervorzutreten pflegt.

Der Gebrauch approximativ richtiger Zahlen zieht, sobald solche Zahlen in Rechnungen verflochten werden sollen, Untersuchungen nach sich, welche dem Calcül mit

streng richtigen Zahlen ganz fremd sind. Man kann nemlich bey jedem Resultate fragen, bis zu welchem Grade von approximativer Richtigkeit es gelange, oder auf wie viele Decimalen es zuverlässig sey, vorausgesetzt daß Gleiches in Absicht auf die Zahlen, womit man rechnet, als bekannt vorliege. Ohne sichere Bestimmungen in dieser Beziehung bleibt das Rechnen mit genäherten Decimalbrüchen, bloß nach den allgemeinen Regeln der Bruchrechnung, ein unsicheres, theilweise vergebliches und unrichtiges Spiel.

Die Möglichkeit solcher Bestimmungen beruht im Allgemeinen darauf, daß man jedesmal bey dem Rechnen mit genäherten Decimalbrüchen zwey Resultate, wovon das eine zu viel, das andere zu wenig beträgt, erhalten, soweit diese also zusammenfallen, die Richtigkeit der erreichten Näherung verbürgen kann.

Bey der Addition genäherter Decimalbrüche, deren jeder seiner Bildung gemäß sicher zu klein ist, gibt die Summe zu wenig; wird aber jeder derselben um eine Einheit in seiner letzten Stelle vermehrt, so bringt sie zu viel.

Bey der Subtraction erhält man zu viel, wenn der Minuend; zu wenig, wenn der Subtrahend in seiner letzten Stelle um 1 vergrößert wird.

Bey der Multiplication wird das ursprüngliche Product zu klein; fällt aber, wenn jedem seiner Factoren in der untersten Stelle eine 1 zugelegt ist, zu groß aus.

Bey der Division wird der Quotient zu klein, wenn man die Zifer in der letzten Stelle bey dem Dividend ungeändert läßt, bey dem Divisor um 1 vermehrt; zu groß hingegen, wenn das Gleiche in

umgekehrter Ordnung bey dem Dividend und Divisor geschieht.

Die weitere Ausführung fordert einige Kenntnisse aus den nächsten Capiteln. Sie findet sich im letzten Capitel.

Man würde übrigens die Regeln für das Rechnen mit genäherten Decimalbrüchen auch dahin entwickeln können, daß aus der periodischen Wiederkehr, welche bey den gegebenen Brüchen statt findet, womit man rechnet, die periodische Wiederkehr des Bruchs hervortreten müßte, welcher das Resultat der Rechnung ist. Da man rückwärts für jeden Decimalbruch, dessen periodische Wiederkehr bekannt ist, den ursprünglichen wiederherzustellen vermag, aus welchem er sich entwickelt hat, so könnte auf diese Art das Rechnen mit genäherten Zahlen zu Resultaten von strenger Richtigkeit führen. Für die Zwecke des gewöhnlichen Calcüls würde ein solches Verfahren von keinem wesentlichen Nutzen seyn; als erste Probe einer Methode, welche die Seele höherer Theile der Wissenschaft ist, hat sie großes Interesse.

Viertes Capitel.

Von den widerstreitenden Zahlen, und der Rechnung mit ihnen.

A. Begriffe von Einstimmung und Widerstreit; Beziehung derselben zur Arithmetik.

Wir bedienen uns der Zahlen nicht allein, um von einer Größe, durch Vermittelung einer anderen, eine



Vorstellung zu bilden, sondern hauptsächlich, durch ihre Hülfe, Resultate der Verknüpfungen zwischen den Größen selbst, ohne Herausgehn zur würklichen Anschauung zu bewerkstelligen. Nun ist es zwar allerdings die erste Bedingung für alle Größen, welche verglichen, oder zu einer neuen zusammengefaßt werden sollen, daß sie gleichartig seyn müssen, das heißt, daß ihre inneren Merkmale als identisch gedacht werden. Aber Größen, welche sich, als gleichartige, würklich verbinden lassen, können, es sey vermöge der Art, wie sie sich in ursprünglicher Anschauung erzeugen, oder vermöge der Beziehungen, die ihnen beygelegt werden, entweder sich so gegen einander verhalten, daß sie nach der Vereinigung neben einander bestehn, und als würklich vorhandene Theile einer neuen Größe erscheinen; oder sie können in solche Verhältnisse gegen einander gesetzt seyn, daß sie sich einander gegenseitig vernichten, sobald sie, übrigens gleich, zu einer dritten zusammenkommen sollen. Im ersten Falle werden sie einstimmig, im zweyten widerstreitend genannt. Kräfte, welche in der Richtung einer gegebenen Linie, nur nach verschiedenen Seiten hinaus, ihre vereinte Gewalt ausüben; Wege, welche alle in derselben Linie, aber nicht nach derselben Seite hin, sich einander anschließend, beschrieben werden; selbst Acte des Zählens, die sich so verbinden, daß der zweyte den ersten rückgängig macht, können als Beyspiele dienen, um diese Begriffe zu versinnlichen. Man muß sich übrigens sehr davor hüten, Verneinung und Widerstreit mit einander zu verwechseln, wozu der Ausdruck entgegengesetzt Veranlassung werden könnte.

Wenn man sich eine Größe bloß in sich selbst vorstellt, finden die Rücksichten, ob sie mit einer anderen, ihr gleichartigen, im Verhältniß der Einstimmung oder des Widerstreites stehe, noch gar keine Statt: selbst bey der Vergleichung zweyer Größen, wenn man bloß die Vielheit von Theilen, welche in der einen liegen, durch Hülfe der anderen erkennen will, kann man davon abstrahiren. Aber, sobald mehrere gleichartige Größen mit einander verknüpft werden, ist es schlechterdings nothwendig, auf ihre gegenseitige Beziehung bey einer künftigen Vereinigung Rücksicht zu nehmen, und zu bestimmen, ob sie dabey einstimmig oder widerstreitend seyn werden. In dieser Hinsicht ist die gewöhnliche Art der Angabe mangelhaft: wir pflegen bey einstimmigen Größen entweder gar nichts über ihre gegenseitige Beziehung zu sagen, und so stillschweigend die Einstimmung anzudeuten, oder wir drücken als verschiedene Eigenschaft der Größen aus, was eigentlich als Verschiedenheit der Beziehung hätte gefaßt werden sollen, so daß sich Zahlen verschiedener Benennung zu bilden scheinen, wo nur eine Einheit existirt, aus der sie sich bilden lassen.

Der Begriff des Widerstreits ist ein Verhältnißbegriff, und durch ihn wird es möglich, aus der Vorstellung des einen von den beyden Dingen, auf die er sich bezieht, die des anderen abzuleiten. Aber er ist schlechterdings reciproc, und in Rücksicht auf ihn kommt keinem von beyden ein ausschließliches Prädicat zu. Daher pflegt man zu sagen, sie sind einander widerstreitend, oder das eine ist das Umgekehrte des anderen.

Wenn indessen zwey Dinge würklich als widerstreitend gedacht werden, so liegt nicht in ihnen, aber nothwendig in der Art wie sie bey dem Gedachtwerden dieses Verhältnisses auftreten, ein characteristischer Unterschied. Bey jedem Verhältniß, bey jeder Vergleichung zwischen zwey Dingen, wird das eine, vor aller Vergleichung, schlechthin gesetzt, das andere aber mittelbarer Weise durch jenes erste bestimmt. Um diese Unterscheidung im vorliegenden Falle zu fixiren, soll diejenige von zwey widerstreitenden Größen, welche schlechthin als gegeben angenommen wird, positiv, diejenige hingegen, deren Vorstellung mittelbarer Weise durch den Begriff des Widerstreits aus der Vorstellung der anderen erzeugt wird, negativ heißen.

Diese Unterscheidung ist unentbehrlich für die Arithmetik. Im Vorhergehenden ist immer nur der Fall betrachtet worden, da die Größen, von denen eine durch die andere ausgedrückt werden sollte, einstimmig waren, wo also die eine selbst, ohne weitere Bestimmung, durch Theilung und Zusammensetzung, die man mit ihr vornahm, die andere geben konnte. Es muß aber auch auf den Fall Rücksicht genommen werden, da die eine der anderen widerstreitet. Da ist nun nothwendig diejenige von ihnen, welche als Einheit genommen wird, positiv, und es bedarf, um sich aus ihr die Vorstellung der anderen zu erzeugen, eines Acts, von dem im vorhergehenden Falle gar keine Rede seyn konnte: man muß sich nemlich erst das Umgekehrte von ihr denken, indem man sich die Vorstellung desselben aus der ihrigen erzeugt, und dann daraus durch Zusammensetzung oder Theilung, wie vorhin, jene andere Größe entstehen lassen. Der erste Fall gibt positive, der andere

negative Zahlen; die ersten werden durch das Zeichen + (plus), die anderen durch das Zeichen — (minus), welches man ihnen vorsetzt, angedeutet; doch haben die positiven den Vorzug, daß man gemeiniglich kein ausdrücklich vorgesetztes Zeichen braucht, um sie anzudeuten.

Da die Verschiedenheit zwischen Größen, welche sich in ihrem Widerstreit zeigt, offenbar nicht auf das Mehr oder Minder ankommt, so kann die eine derselben weder größer noch kleiner als die andere heißen. Aber das Positive ein Höheres, das Negative ein Niedrigeres zu nennen, ist man allerdings berechtigt. Je mehr gleiche Theile eine positive Zahl aufnimmt, desto höher, je mehr gleiche Theile eine negative Zahl in sich faßt, desto niedriger wird dieselbe.

B. Die Grundoperationen mit positiven und negativen Zahlen.

Das Verfahren bey der Ausübung der Rechnungsarten an positiven und negativen Zahlen läßt sich auf eine sehr einfache Art aus den vorigen Begriffen ableiten.

I. Die Addition kann Zahlen, welche in Ansehung ihres Zeichens übereinstimmen, sie mögen positiv oder negativ seyn, im eigentlichen Sinne durch würkliches Hinzuzählen vereinigen; die Summe enthält die Theile, und hat einerley Zeichen mit ihnen. Aber bey Zahlen von entgegensetzten Zeichen muß man, indem man sie zu einander setzt, die, welche die kleinere Menge gleichgroßer Theile enthält, ganz verschwinden lassen, und dafür in der an Menge größeren eben so viele solcher Theile vernichten, so daß der Rest das Zeichen

der letzten bekommt. Wenn man hier das Resultat der Verknüpfung ein Ganzes, und die Zahlen, aus denen es entsteht, seine Theile nennen will, so muß man wenigstens erzeugende Theile (partes efficientes) von Bestandtheilen (partes integrantes) wohl unterscheiden. Das Ganze entsteht hier aus Theilen, die durchaus nicht in seiner Vorstellung liegen, dabey eine Verschiedenheit zeigend, die ihre Fähigkeit vereinigt zu werden, nicht aufhebt, und nicht auf Mehr- oder Minder-Seyn zurückkommt *).

II. Die Subtraction kann hier nicht immer als würkliche Wegnahme eines Bestandtheils vom Ganzen gedacht werden, wohl aber als die Auffindung einer Zahl, die in Verknüpfung mit einer gegebenen, dem Subtrahend, eine andere gleichfalls gegebene, den Minuend, erzeugen kann. Es lassen sich dabey in Ansehung der Zeichen mehrere Fälle denken, aber die Regel des Verfahrens ist nur eine. Nemlich der Minuend, mit dem Umgekehrten des Subtrahend verbunden, ist die gesuchte Zahl. Denn wenn zu ihr der Subtrahend würklich hinzugesetzt wird, so hebt er jenes in ihr befindliche Umgekehrte wieder auf, und das Resultat der Verknüpfung ist, wie gefordert wurde, der Minuend.

*) Die Vernachlässigung dieser Bemerkung hat zu einer Vorstellungsart von negativen Zahlen geführt, die Anstoß veranlassen kann: sie sollen nemlich kleiner als nichts seyn, während die positiven größer als nichts sind. Eine andere, auf ähnliche Weise über die Grenze getriebene, Art der Betrachtung macht aus negativen Größen Etwas das größer als unendlich ist, ohne daß sie darum aufhören kleiner als nichts zu seyn.

Man pflegt die obige Regel so auszudrücken: man gebe dem Subtrahend das umgekehrte Zeichen, und addire ihn zum Minuend, so hat man den Rest.

III. Bey der Multiplication muß man mehrere Fälle unterscheiden, da für jeden das Zeichen des Products, worauf es hier allein ankommt, eine eigene Bestimmung erfordert. Ist der Multiplicator eine positive Zahl, war es also die Einheit selbst, aus der man ihn durch bestimmte Theilung oder Zusammensetzung erzeugte, so ist es der Multiplicand selbst, aus dem man durch dieselben Acte das Product bilden muß, welches also von demselben Zeichen seyn wird, wie der Multiplicand. Ist hingegen der Multiplicator eine negative Zahl, folglich entstanden aus der Einheit, indem man zuerst das Umgekehrte von ihr bildete, und hernach daraus eine gewisse Zusammensetzung machte, so wird das Product, indem man mit dem Multiplicand auf gleiche Weise verfährt, ihm widerstreitend werden müssen. Die vier Fälle, welche es in Ansehung der Zeichen beym Multiplicand und Multiplicator geben kann, fallen unter die allgemeine Regel: gleiche Zeichen der Factoren geben bey der Multiplication ein positives Product, ungleiche ein negatives.

IV. Die Division gibt in Ansehung der Zeichen des Dividend und Divisor gleichfalls vier verschiedene Fälle an die Hand. Ihre Regel ist die der Multiplication mit anderen Worten. Ist der Dividend (das Product) positiv, so haben Divisor und Quotient (die Factoren) gleiche; ist er negativ, so führen dieselben verschiedene Zeichen. Daraus findet sich eine ähnliche

Vorschrift wie bey der Multiplication: Dividend und Divisor von gleichen Zeichen geben einen positiven Quotienten, von ungleichen Zeichen einen negativen.

Sechstes Capitel.

Erste Anwendung der Grundoperationen.

Der Gebrauch, welchen man von den allgemeinen arithmetischen Lehren macht, besteht hauptsächlich in der Bestimmung unbekannter Größen, die mit anderen gegebenen in einem bekannten Zusammenhange stehn. Sobald durch die Umstände der Aufgabe unmittelbar die arithmetischen Operationen vorgeschrieben werden, welche mit gegebenen Zahlen vorzunehmen sind, um die unbekannten zu finden, bedarf es keiner weiteren Regeln, um die Anwendung zu leiten. Dahin gehören z. B. die vier Rechnungsarten mit benannten Zahlen, die Reductionen benannter Zahlen auf andere Einheiten, und ähnliche Aufgaben. Aber gewöhnlich sind die Beziehungen verwickelter, die unbekannten Größen werden in Verknüpfungen mit den bekannten gegeben, und es sind, ehe man eigentlich rechnen kann, besondere Entwicklungen nöthig, um aus solchen Ausdrücken die Operationen abzuleiten, welche mit den bekannten Größen angestellt werden müssen, um die unbekannten zu entdecken.

I. Gleichungen mit einer unbekannten Größe; vom ersten Grade; ihre allgemeine Lösung.

Man muß mit dem Falle den Anfang machen, wo nur eine unbekannte Größe in Frage kommt. Soll diese überall bestimmbar seyn, so muß durch die Umstände der Aufgabe die Gleichheit zweyer Zahlenverknüpfungen, gebildet durch Verbindungen der unbekannten Zahl mit anderen bekannten, und dieser bekannten unter sich selbst, gegeben werden. Man bekommt es also mit Gleichungen zu thun, denn jeder Ausdruck, in welchem eine bestimmte Verbindung zwischen beliebig gewählten Zahlen einer zweyten ähnlichen gleichgesetzt wird, führt diesen Namen. Die unbekannte Zahl läßt sich aus einer solchen bestimmen, wenn es möglich ist, die Form der Gleichheit so zu verändern, daß auf der einen Seite die unbekannte Größe ganz allein, auf der anderen Seite eine Verbindung aller übrigen bekannten Größen vorkommt; die Gleichung heißt aufgelöst, sobald diese Absicht erreicht ist. Hier wird der Gebrauch von Zeichen fast unentbehrlich zur Uebersicht; deshalb wählt man auch für die unbekannte Größe ein solches (gewöhnlich einen von den letzten Buchstaben des Alphabets) und deutet alle Verbindungen, welche in der Aufgabe vorgeschrieben sind, durch die Zeichen der arithmetischen Operationen ausdrücklich an, wodurch denn der Ansatz einer Gleichung entsteht.

Um sodann weiter verfahren zu können, ist es zuerst nöthig, die gewöhnlichen Verwandlungen, welche an der Gestalt einer Gleichung, ohne sie selbst aufzuheben, vorgenommen werden dürfen, kennen zu lernen, damit sie hernach zu dem eigentlichen Zweck der Auflösung angewandt werden mögen.

Man darf auf beyden Seiten der Gleichung dieselbe Größe addiren oder subtrahiren, ohne die Gleichheit zu stören. Dadurch wird es möglich, jedes beliebige Glied von der Seite der Gleichung, worauf es sich befindet, fortzuschaffen; man zieht es nemlich auf beyden Seiten ab. Dies Verfahren wird Transposition genannt, und gewöhnlich unter folgender mechanischen Regel vorgestellt: man lasse das Glied auf der einen Seite der Gleichung weg, und setze es auf die andere mit umgekehrtem Zeichen hinüber.

Man darf eben so auf beyden Seiten der Gleichung mit eben derselben Zahl multipliciren oder dividiren. Kommt also in irgend einem Gliede ein Factor vor, den man aus demselben fortschaffen will, so braucht man nur alle Glieder der Gleichung mit ihm zu dividiren. Ist im entgegengesetzten Falle ein Divisor in einem Gliede, so befreyt die Multiplication aller Glieder der Gleichung mit ihm selbst, das Glied von demselben. Bey der letzten Regel wird freylich vorausgesetzt, daß der Divisor eine unbenannte Zahl sey. Das läßt sich auch allemal annehmen, sobald man es sich zur Regel macht, bey jedem Quotienten gleichartiger Größen Dividend und Divisor auf dieselbe Einheit zu reduciren, wie es nothwendig geschehen muß, wenn der Quotient wirklich berechnet werden soll. Denn alsdann bleibt der Quotient derselbe, Dividend und Divisor mögen benannte oder unbenannte Zahlen seyn, und man wählt das Letzte, weil es Fortschaffung der Divisoren gestattet.

Durch Hülfe dieser Regeln versucht man, einer Gleichung, die man auflösen soll, vorläufig eine entwickelte Gestalt zu geben, und zwar auf folgende Art.

1. Man untersucht, ob etwa Factoren in ihr liegen, die aus Theilen zusammengesetzt werden sollen, welche sich nicht weiter durch vollzogene Addition zusammenziehn lassen, und entwickelt in diesem Falle die Partialproducte, zu denen solche Factoren Veranlassung geben.

2. Man schafft alle Divisoren fort, die etwa in den Gliedern der Gleichung vorkommen, indem man allmälig mit jedem derselben alle Glieder multiplicirt. Sind zusammengesetzte Größen unter ihnen, so beobachtet man das Verfahren der ersten Regel. Sind die Divisoren bekannte Zahlen, so ist ihre Fortschaffung nicht nothwendig.

Nachdem dies geschehn, kann man eigentlich erst beurtheilen, ob die Gleichung vom ersten Grade ist. Jedes Glied von ihr muß entweder einfach, oder ein Product aus einfachen Factoren seyn, und die unbekannte Größe darf in den Gliedern, worin sie sich befindet, nur einmal als Factor stehn, wenn die Gleichung nicht zu höheren Graden gehören soll. Ist sie würklich vom ersten Grade, so enthält sie jetzt nur zweyerley Arten von Gliedern: solche, in denen die unbekannte Größe, multiplicirt mit bekannten Factoren, vorkommt, und solche, in denen bloß bekannte Größen vorhanden sind. Alsdann erfolgt ihre Lösung unfehlbar durch folgende Acte.

3. Durch Transposition schafft man alle Glieder, in denen die unbekannte Größe liegt, auf die eine Seite der Gleichung, und vereinigt sie zu einem einzigen; eben so alle Glieder, in denen bloß bekannte Größen enthalten sind, auf die andere, und vereinigt sie gleichfalls.

4. Man schafft endlich durch Division den Factor weg, womit die unbekannte Größe in der letzten Form der Gleichung noch multiplicirt war; so erscheint sie auf der einen Seite der Gleichung ganz allein, während alle bekannten Größen, auf die andere Seite hinübergeschafft, ihren Werth ausdrücken.

Als eine Probe von der Richtigkeit der Auflösung kann man den gefundenen Werth der unbekannten Größe in die anfängliche Gleichung für das Zeichen von ihr an die Stelle setzen, und da müssen die Zahlenausdrücke, welche man auf beyden Seiten erhält, wenn sie würklich berechnet werden, gleiche Resultate geben.

II. Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Wenn in einer Aufgabe mehr als eine unbekannte Größe vorkommt, so müssen sich aus ihr gerade eben so viele Gleichungen entwickeln lassen, als unbekannte Größen vorhanden sind, wenn die Auflösung möglich seyn soll. Zuerst kommt es darauf an, jeder von diesen Gleichungen eine entwickelte Gestalt zu geben, welches genau wie bey einfachen verrichtet wird. Ihre Glieder werden, wenn dieses gelungen ist, sämmtlich Producte aus einfachen Factoren, und es darf wie vorhin in keinem Gliede mehr als ein Factor unbekannt seyn, wenn sich die Gleichung durch unmittelbare Anwendung der vier arithmetischen Hauptoperationen auflösen lassen soll. Uebrigens aber können und werden in verschiedenen Gliedern einer solchen Gleichung verschiedene unbekannte Größen vorkommen.

Der einfachste Fall nimmt zwey Gleichungen und zwey unbekannte Grössen in ihnen an. Die Auflösung wird dadurch erreicht, daß man aus denselben eine dritte Gleichung ableitet, in der die eine unbekannte Grösse nicht mehr vorhanden ist, die also nach den vorigen Regeln behandelt werden kann. Dazu gibt es mehr als ein Mittel. Entweder man nimmt die eine Gleichung, sucht aus ihr den Werth der einen unbekannten Grösse, als wenn die andere mit zu den bekannten gehörte, und setzt diesen Ausdruck für die erste unbekannte Grösse in der zweyten Gleichung allenthalben wo sie vorkommt an die Stelle, so daß man nun eine dritte Gleichung erhält, worin bloß noch die andere unbekannte Grösse enthalten ist. Oder man sucht aus jeder der beyden Gleichungen den Ausdruck für dieselbe unbekannte Grösse, und setzt die beyden, welche man erhält, unter einander gleich, welches wieder eine dritte Gleichung gibt, in der nur noch die andere unbekannte Grösse vorhanden ist. Man kann dies Verfahren zweymal anstellen, um erst die eine, und hernach die andere unbekannte Grösse fortzuschaffen; man kann aber auch, nachdem die eine gefunden ist, ihren Werth in eine der beyden anfänglichen Gleichungen setzen, und dann daraus die andere bestimmen. Es gibt also hier eine Mannichfaltigkeit von Wegen, die alle zu demselben Resultate führen müssen.

Wenn mehr als zwey unbekannte Grössen und Gleichungen gegeben sind, so bleibt die Art des Verfahrens die nemliche, und es ist leicht die Methode zu fassen, so weitläuftig es auch seyn mag, sie bis zum letzten Resultat durchzuführen. Man schafft nemlich eine von den unbekannten Grössen nach der anderen fort,

und zwar jedesmal so, daß man von allen vorliegenden Gleichungen eine nimmt, den Werth der unbekannten Größe, die man fortschaffen soll, aus ihr berechnet, und in die übrigen Gleichungen da, wo diese Größe vorkommt, an die Stelle setzt. Es verringert sich dadurch jedesmal die Zahl der unbekannten Größen zugleich mit der Zahl der Gleichungen um Eins, und man wird zuletzt dahin kommen, daß man nur eine Gleichung, und in ihr nur eine unbekannte Größe übrig behält. Man hat die Wahl, welche von allen es seyn soll; man muß also eine nach der anderen nehmen, und findet sie so zuletzt alle. Die Auflösung wird sich auch hier in eine allgemeine Formel fassen lassen, die sich aber an dieser Stelle, theils wegen ihrer Weitläuftigkeit, theils wegen der Voraussetzung combinatorischer Begriffe und Regeln, wodurch sie allein dargestellt werden kann, nicht ausführen läßt.

Zweyter Abschnitt.

Theorie der Potenzen.

Einleitung.

Erste Idee von Potenzen, und Untersuchungen, wozu diese Formen Veranlassung geben.

Der erste Abschnitt der Arithmetik beschäftigte sich mit den einfachen Grundoperationen, wodurch eine Verbindung zwischen gegebenen Zahlen geknüpft werden kann. Alle übrigen Operationen dieser Wissenschaft sind nichts als Anwendungen jener einfachen zur Bildung zusammengesetzter Zahlenausdrücke. Es ist offenbar, daß es von solchen eine unendliche Mannichfaltigkeit geben kann, sofern auf die Verschiedenheit der Form Rücksicht genommen wird. Man hat also Ursache, diejenigen Zusammensetzungen, welche in Ansehung ihrer Regel die einfachsten sind, und worauf andere, mehr verwickelte, zurückgeführt werden können, einer genauen Betrachtung zu unterwerfen.

Außer der Addition gleicher Zahlen, die sich aber im Begriff der Multiplication als eine einfache Zahlenverknüpfung denken läßt, gibt es keine zusammengesetzte Verbindung, die in Absicht auf ihren Begriff so leicht gefaßt werden kann, als die, welche durch Multiplication einer beliebigen Anzahl gleicher Factoren mit einander hervorgebracht wird. Andeutungen solcher Producte aus gleichen Factoren geben eines der wichtigsten Elemente aller übrigen zusammengesetzten Zahlenverknüpfungen ab, und aus dieser Ursache ist ihre genauere Betrachtung unentbehrlich für die Arithmetik.

Zuerst ist es nöthig, die Kunstwörter zu bemerken, in welche man die hier zusammentretenden Begriffe zu kleiden pflegt. Ein Product aus einer bestimmten Menge gleicher Factoren heißt eine Potenz eines solchen Factors; dieser selbst, sofern er bey der Bildung der Potenz zum Grunde liegt, ihre Wurzel, und die Zahl, welche bestimmt, wie viel gleiche Factoren in der Potenz vorhanden sind, Exponent oder Grad ebenderselben. Um anzudeuten, daß eine Zahl mehrmals als Factor gesetzt werden solle, stellt man das Zeichen des Exponenten auf der rechten Seite oben an das Zeichen jener Zahl, z. E. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$.

Die Beziehung zwischen Wurzel, Exponent und Potenz gibt zu der Idee von drey Hauptaufgaben Veranlassung. Die erste ist die Erhebung zur Potenz, wobey die Wurzel nebst dem Exponenten gegeben ist, und daraus die Potenz selbst berechnet werden soll. Die zweyte ist die Wurzelausziehung, wobey eine Zahl als Potenz eines bestimmten Grades gegeben wird, und die Absicht ist, sie in so viel gleiche Factoren zu zerfällen, als jener Grad anzeigt, um die Größe eines

solchen Factors (der Wurzel) zu bestimmen. Der Grad der gegebenen Potenz wird hier auch Grad oder Exponent der gesuchten Wurzel genannt. Daß aus einer Zahl die Wurzel eines bestimmten Grades gezogen werden soll, deutet das vor sie gestellte Zeichen $\sqrt{}$ an, in dessen Oeffnung der Grad der Wurzel gesetzt zu werden pflegt, z. E. $\sqrt[3]{64} = 4$. Bey der dritten Aufgabe endlich sind Wurzel und Potenz gegeben, der Exponent aber ist unbekannt, und soll aus ihnen gefunden werden. Sie pflegt, obschon sich später eine andere Benennung für sie einfindet, Exponentiation zu heißen.

Erstes Capitel.

Erhebung zum Quadrat, und Ausziehung der Quadratwurzel.

I. Erhebung zum Quadrat.

Ein Product aus zwey gleichen Factoren wird das Quadrat, oder die zweyte Potenz eines solchen Factors genannt; er selbst, die Wurzel des Quadrats; eine Zahl zum Quadrat erheben, heißt sie mit sich selbst multipliciren.

Diese Operation ist ein besonderer Fall der Multiplication; ihre Regeln sind daher nur Modificationen der Vorschrift für jene. Indessen erfordert die ihr entgegenstehende umgekehrte Operation weitere Ausführung, und namentlich eine genaue und vollständige Entwickelung der Art, wie sich bey zusammengesetzten Zahlen aus den Theilen der Wurzel die des Quadrats bilden.

Das Hauptsächlichste darüber ist in folgenden Sätzen enthalten.

1. Jedes Quadrat ist positiv, das Zeichen der Wurzel sey, welches es wolle.

$$(+a)^2 = (-a)^2 = +(a^2).$$

2. Das Quadrat eines Products ist ein Factum aus den Quadraten seiner Factoren.

$$(a \cdot b)^2 = (a^2) \cdot (b^2).$$

3. Das Quadrat eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zähler das Quadrat vom Zähler, dessen Nenner das Quadrat vom Nenner des gegebenen ist.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Das Quadrat einer ganzen Zahl ist nothwendig eine ganze Zahl; das Quadrat eines Bruchs ein Bruch, echt oder unecht, je nachdem seine Wurzel es war, aber niemals fähig eine ganze Zahl zu werden, wenn der Bruch selbst nicht von gleicher Beschaffenheit war. Der letzte Theil dieses Satzes bedarf eines strengen Beweises.

Bedeute $\frac{a}{b}$ einen wahren unechten Bruch, von dem sich also annehmen läßt, daß Zähler und Nenner keinen Factor gemein haben. Der Kürze wegen sey i das Zeichen jeder beliebigen ganzen Zahl, so unbestimmt, daß es jedesmal eine andere andeuten mag, wenn es von Neuem gebraucht wird. Ferner sey p eine in b enthaltene Primzahl (mithin b selbst, wenn dieses eine solche ist). Könnte nun $\frac{a^2}{b^2} = i$ seyn, so wäre auch $\frac{a^2}{p} = i$. Ist $a = np + c$, wo c kleiner als p seyn soll, so wird

$$\frac{a^2}{p} = \frac{n^2p^2 + 2npc + c^2}{p} = n^2p + 2nc + \frac{c^2}{p}.$$

Soll dies = i seyn, so ist $\frac{c^2}{p}$ gleichfalls = i. Nun aber ist es unmöglich, daß überhaupt das Product zweyer Zahlen, f, g, die kleiner sind, als eine Primzahl p, durch diese theilbar, oder $\frac{f \cdot g}{p}$ = i sey. Denn man kann p = fh + r setzen, wo r kleiner als f. Wäre nun $\frac{fg}{p}$ = i, so gäbe dieses f = $\frac{pi}{g}$, welches in dem Ausdruck p = fh + r für f substituirt p = $\frac{hpi}{g}$ + r, erzeugte. Daraus folgte pg — phi = gr, kürzer p(g — hi) = gr. Da aber g — hi selbst = i ist, und + i seyn muß, weil gr nicht negativ werden kann, so müßte pi = gr, oder $\frac{r \cdot g}{p}$ = i seyn. Es gäbe also, sobald zwey Zahlen, jede kleiner als p, ein durch p theilbares Product erzeugten, statt der einen von ihnen, f, und aus ihr abzuleiten, eine dritte, kleiner als sie, r, welche mit der andern wiederum ein durch p theilbares Product hervorbrächte. Es würden mithin solcher Zahlen unzählig viele, jede eine ganze, jede kleiner als die vorige, möglich seyn, welches ungereimt ist. Es kann also, f = g = c gesetzt, nicht $\frac{c^2}{p}$, mithin nicht $\frac{a^2}{p}$, noch weniger $\frac{a^2}{b^2}$ = i seyn.

4. Das Quadrat einer vieltheiligen Größe läßt sich durch eine Vereinigung von Producten darstellen, die aus ihren einzelnen Theilen gebildet sind. Um diese Producte nach einer festen Regel zu bestimmen, ist es am bequemsten, die Aufgabe so zu fassen: Man hat eine Größe, gleichviel ob sie würklich einfach ist, oder schon eine Vereinigung gegebener Theile enthält; das Quadrat dieser Größe ist auch bekannt: nun wächst sie um Etwas, und man will wissen, was für einen Zuwachs ihr Quadrat dadurch erhalten werde. Sey a die Größe, ihr Quadrat also a^2; sie wachse um b, werde also $a + b$; das Quadrat davon ist $a^2 + 2 . a . b + b^2$. Es ist also zum Quadrat der Größe, a^2, hinzugekommen $2 . a . b + b^2$, das heißt das Doppelte des Products aus der schon vorhandenen Größe, in den neu hinzugekommenen Theil, nebst dem Quadrate dieses Theils. Indem man bey einer gegebenen vieltheiligen Größe von ihrem ersten Theile ausgeht, jeden folgenden allmälig als hinzukommend zu dem Inbegriff der schon durchlaufenen vorhergehenden betrachtet, und den Zuwachs berechnet, den das Quadrat dieses Inbegriffs wegen des neu hinzugekommenen Theils erhalten muß, bedarf es nur der fortgesetzten Anwendung der vorigen Regel, um nach und nach alle Producte zu finden, die das Quadrat der gegebenen vieltheiligen Größe ausmachen.

Eine specielle Anwendung läßt sich von dieser Methode beym Quadriren decadisch gebildeter ganzer Zahlen machen. Diese sind sämmtlich, die neun ersten abgerechnet, vieltheilige Größen; jede Zifer einer solchen Zahl stellt einen eigenen Theil derselben dar. Nur muß dabey auf den Rang dieser Zifern Rücksicht genommen

werden, denn der Rang der Producte, die man aus ihnen bildet, hängt davon ab. Am bequemsten wird das Verfahren, wenn man zum Voraus eine Regel für die Rangfolge der Producte aufsucht, welche der obigen Methode gemäß für das Quadrat einer vielzifrigen ganzen Zahl berechnet werden müssen, damit man, während der Operation selbst, nicht an den Rang der Zifern und ihrer Producte zu denken braucht. Ist a die höchste Zifer einer Zahl, oder der Inbegriff mehrerer Zifern von der höchsten an gerechnet, b eine folgende Zifer, die sich unmittelbar an a anschließt, so ist a^2 um einen Rang höher als 2 . a . b, und dieses wieder um einen Rang höher als b^2. Daher die Regel: man sehe auch decadisch gebildete Zahlen als allmälig entstehende an, so daß anfangs bloß die höchste Zifer einer solchen als vorhanden, jede folgende nach der Reihe als neu entstandener Zuwachs betrachtet wird. Das doppelte Product aus jeder Zifer in den Inbegriff der ihr vorangegangenen, um eine Stelle niedriger als das vor ihrem Zutreten schon berechnete, und das Quadrat derselben Zifer, wieder um eine Stelle niedriger als das eben genannte doppelte Product, müssen alsdann fortlaufend gebildet, angefügt und zusammengefaßt werden.

Man kann dabey noch die Bemerkung machen, daß die Quadrate der successiven Zifern successiv in die Stellen gerader Ordnung; die doppelten Producte hingegen aus jeder Zifer in den Inbegriff der vorhergehenden, in die dazwischen liegenden Stellen ungerader Ordnung gerückt werden. Daher darf man behaupten: das Quadrat einer Zahl enthalte nicht weniger Stellen gerader Ordnung, als die Zahl Zifern. Es ist erlaubt

hinzuzusetzen: auch nicht mehr, welches aus folgender Betrachtung erhellt. Jede Zahl liegt zwischen zwey Einheiten höherer Ordnung; die eine davon, kleiner als die Zahl, hat den Rang ihrer höchsten Zifer; die andere, größer als die Zahl, hat einen um Eins höheren Rang. Die Quadrate dieser Einheiten sind um zwey Grade unterschieden, übrigens aber die kleinsten Zahlen ihres Ranges. Daher kann das Quadrat der gegebenen Zahl, welches zwischen ihnen liegen soll, nichts enthalten, das um zwey Grade höher wäre als das Quadrat der höchsten Zifer in ihr. Es gilt also die Regel: das Quadrat einer Zahl hat so viel gerade Stellen, als die Zahl selbst Zifern, und es ist erlaubt sie umzukehren.

Um das Quadrat eines Bruchs zu bilden, bedarf es keiner weiteren Regeln. Nur, wenn man sich den Gebrauch der Decimalbrüche erlaubt, und statt des wahren Bruchs einen andern setzt, der bis zu einer gewissen Grenze mit ihm übereinstimmt, muß man nicht vergessen, daß die Wurzel nur eine abgebrochene Zahl ist. Ihr berechnetes Quadrat wird doppelt soviel Decimalstellen enthalten als sie, aber die letzte Hälfte derselben wird zuverlässig schon von denen abweichen, die eben die Stellen ausfüllen würden, wenn man das Quadrat des gegebenen Bruchs unmittelbar berechnen, und in einen Decimalbruch verwandeln wollte.

II. Ausziehung der Quadratwurzel.

Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl ziehn, heißt eine andere suchen, aus welcher jene entsteht, wenn man sie mit sich selbst multiplicirt. Man

deutet sie gewöhnlich durch das Zeichen $\sqrt{}$, ohne beygefügten Grad an.

Diese Aufgabe fordert zwar, so wie die Division, die Decomposition eines Products in zwey Factoren, aber, anstatt einen von denselben anzugeben, setzt sie nur eine gewisse Beziehung (der Gleichheit) zwischen beyden fest. Daher ist hier keine directe Zerfällung des Products gestattet; Versuche sind das einzige Mittel, um die Größe eines solchen Factors zu treffen.

1. Möglichkeit der Quadratwurzelausziehung.

Ist es allemal möglich, aus einer beliebig angenommenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehn? Diese Frage muß vor allen ferneren Untersuchungen beantwortet werden, weil sich keine directen Regeln für die verlangte Operation geben lassen.

Dem Zeichen nach könnte die gegebene Zahl positiv oder negativ seyn. Aber es ist unmöglich, daß ein Product aus zwey gleichen Factoren negativ werde. Die Aufgabe ist also lediglich auf positive Zahlen beschränkt, die, bloß in Rücksicht auf das Zeichen betrachtet, sehr wohl ein Product aus zwey gleichen Factoren seyn können. Ja, ein solcher Factor kann eben so gut positiv als negativ seyn, so daß also an der Auflösung der Aufgabe, so oft sie möglich ist, eine unvermeidliche Zweydeutigkeit haftet.

Die positive Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, kann entweder ganz, oder gebrochen seyn. Da die Wurzel aus einem Bruche erhalten wird, indem man die Wurzel des Zählers zum Zähler, die des Nenners zum Nenner eines neuen Bruchs macht, so

kommt die ganze fernere Untersuchung darauf zurück, ob sich aus jeder beliebigen positiven ganzen Zahl die Wurzel finden läßt. Diese Wurzel müßte, dem Vorhergehenden gemäß (I, 3.), selbst entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn. Aber es ist unmöglich, daß die Quadratwurzel aus jeder beliebigen ganzen Zahl selbst wieder eine solche sey. Die Quadrate zweyer um Eins verschiedenen ganzen Zahlen, enthalten immer eine Menge eben solcher Zahlen zwischen sich, da $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ist. Jede von diesen kann keine ganze Zahl zur Quadratwurzel haben; es bliebe also nur Etwas zwischen zwey benachbarte ganze Zahlen fallendes, das heißt ein nicht reducirbarer unechter Bruch, als Werth der verlangten Wurzel übrig. Aber auch ein solcher ist unstatthaft, weil sein Quadrat keine ganze Zahl geben kann. Man darf daher zum Voraus versichert seyn, daß es unter den ganzen Zahlen, mithin auch unter den Brüchen sehr wenige gibt, denen eine Quadratwurzel zukommt, daß folglich in den meisten Fällen die Ausziehung dieser Wurzel nicht vollführt werden kann. Es ist aber dabey eine ganz andere Art von Unmöglichkeit, als bey negativen Zahlen. Bey jenen ließ sich nicht einmal ein Zeichen denken, welches die Wurzel führen könnte, weswegen Ausdrücke, welche die Wurzelausziehung aus negativen Zahlen fordern, unmögliche oder imaginäre genannt zu werden pflegen; hier hingegen, wo es darauf ankommt, aus einer positiven ganzen Zahl die Wurzel zu ziehn, würde sich das Zeichen des Resultats ohne Schwierigkeit angeben lassen, wenn es nur der würklichen Größe nach bestimmbar wäre. Ausdrücke, in denen Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl verlangt wird, die zwar

positiv ist, aber streng genommen nicht das Product von zwey gleichen Factoren seyn kann, heißen irrational.

Man müßte diesen Umständen gemäß die Aufgabe der Wurzelausziehung, auf positive Zahlen beschränkt, hypothetisch so aussprechen: zu untersuchen, ob eine vorgegebene Zahl eine Quadratwurzel habe, und welches sie im bejahenden Falle sey. Aber man substituirt dafür eine andere Aufgabe, welche, allgemeiner als die der Wurzelausziehung, unbedingt aufgelöst werden kann, und zugleich mit dieser zusammenfällt, wo sich dieselbe ausführen läßt; man fordert nemlich eine Zahl von bestimmt vorgeschriebener Form, deren Quadrat unter allen Quadraten, die aus Zahlen derselben Form entspringen könnten, das größtmögliche ist, welches von der gegebenen abgezogen werden kann.

2. Ausziehung der Quadratwurzel aus und in ganzen Zahlen.

Ausziehung der Quadratwurzel in ganzen Zahlen heißt das Verfahren, wobey man dahin gelangt, unter allen ganzen Zahlen diejenige zu finden, deren Quadrat einer gegebenen am nächsten kommt *). Da Versuche das einzige Mittel sind, um diese Aufgabe zu lösen, so kommt Alles darauf an, Methode in die Anstellung derselben zu bringen, um dadurch überflüssige

*) Diese Benennung ist nicht streng richtig, weil in den wenigsten Fällen die gefundene Zahl eine Quadratwurzel ist. Man darf auch nicht sagen, daß sie, wo nicht genau, doch beynahe, die verlangte Wurzel darstelle, denn wie sollte eine Annäherung an Etwas geschehen können, dessen Unmöglichkeit bewiesen ist?

so viel als möglich zu verhüten. Es lassen sich aber nur dann Abkürzungen solcher Art anbringen, wenn die gegebene Zahl ein Quadrat enthält, welches aus einer nicht einfachen, sondern zusammengesetzten Wurzel entsprungen ist. Daher fordert man auch, daß die Wurzel aus jeder zweyzifrigen Zahl, die nur eine einfache Zifer seyn kann, unmittelbar durch Hülfe des Einmaleins gegeben werde.

Sobald hingegen die Menge der Zifern in der vorgegebenen Zahl zwey überschreitet, muß das größte Quadrat, welches in ihr liegt, aus einer Wurzel entsprungen seyn, die selbst mehr als eine Zifer enthält, und alsdann wird es möglich, die successiven Zifern dieser Wurzel von oben herab, eine nach der andern, durch Versuche auszumitteln.

Die Menge der Zifern, welche die Wurzel enthalten wird, bestimmt sich leicht aus der Ansicht der gegebenen Zahl: sie ist einerley mit der Menge von geraden Stellen, welche in dieser vorhanden sind (I, 4.). Ausserdem weiß man, wie jede von den unbekannten Zifern der Wurzel allmälig zur Bildung der gegebenen Zahl beygetragen hat, und kann schon zum Voraus die Stellen bezeichnen, worin die einzelnen Producte stehn müssen, aus denen das vorliegende Quadrat durch Zusammensetzung erwachsen ist (I, 4.).

Bey der Bildung eines Quadrats wird zuerst das Quadrat der höchsten Zifer berechnet, und so gestellt, daß es bis in die oberste gerade Ordnung hinabgeht. Daher sondert man umgekehrt bey einer Zahl, von der das größtmögliche Quadrat abgezogen werden soll, den Theil ab, der bis in die höchste gerade Ordnung reicht, und sucht die größte Zifer, deren Quadrat von ihm

würklich abgezogen werden kann; sie entdeckt sich unfehlbar durch das Einmaleins, und kann unbedenklich als die höchste Zifer der gesuchten Wurzel angesehn werden, weil alle folgenden sich nach ihr richten, und so gewählt werden müssen, daß sie die größtmöglichen werden, welche neben ihr bestehn können. Nachdem das Quadrat dieser höchsten Zifer von der gegebenen Zahl weggenommen ist, kommt man zu dem nächstniedrigeren Partialproducte, welches in ihr liegen muß. Dies ist das doppelte Product aus der ersten Zifer der Wurzel in die zweyte, es endigt in einer Stelle, die nur einen Rang niedriger ist, als die, worin das Quadrat der höchsten Zifer stand. Man sondere daher von dem Reste, den die vorige Abziehung ließ, den Theil ab, der bis zu dieser Stelle hinabreicht, nehme von der ersten schon gefundenen Zifer das Doppelte, und dividire dadurch den vorliegenden Theil, so daß man nur die ganze Zahl angibt, welche in den Quotienten kommt, und, wie sich leicht zeigen läßt, nur aus einer Zifer bestehn kann. Größer als sie kann die gesuchte zweyte Zifer nicht seyn, denn das Product aus ihr in das Doppelte der ersten soll sich von dem vorliegenden Theile abziehn lassen. Aber kleiner könnte die letzte zuweilen sehr wohl ausfallen. Nachdem das Product aus der so gefundenen Zifer in das Doppelte der ersten würklich gebildet und abgezogen ist, muß sich von dem Theile des Restes, der bis zu einer um einen Grad niedrigeren Stelle hinabgeht, das Quadrat eben dieser Zifer abziehn lassen, wenn sie würklich die zweyte der gesuchten Wurzel ist. Geht das nicht an, so ist sie größer als die wahre zweyte Zifer; man muß sie folglich so lange verringern, bis sowohl das Product aus

ihr in das Doppelte der ersten schon bekannten Zifer, als auch ihr eigenes Quadrat, an den gehörigen Stellen von der vorliegenden Zahl abgezogen werden können. Diese Verringerung muß allmälig, jedesmal nur um eine Einheit geschehn, damit der größtmögliche Werth für die zweyte Zifer nicht verfehlt werde. Dabey braucht man aber nicht an die folgenden Producte zu denken, welche bey einer mehr als zweyzifrigen Wurzel noch außer den vorigen in der gegebenen Zahl enthalten seyn müssen, denn sie hängen sämmtlich von den folgenden noch unbekannten Zifern der Wurzel ab, und diese müssen so bestimmt werden, daß sie sich alle an den gehörigen Stellen abziehn lassen. Der Mechanismus, wodurch jede der folgenden Zifern entdeckt wird, ist demjenigen durchaus ähnlich, welcher für die zweyte so eben vorgeschrieben ist. Man kann überhaupt sagen: wenn von der gesuchten Wurzel mehrere der höchsten Zifern schon gefunden sind, und das aus ihnen entspringende Quadrat von der gegebenen Zahl weggenommen ist, so enthält der Rest zunächst das Product aus dem Doppelten der schon gefundenen Zifern in die neue gesuchte, und hernach, um eine Stelle niedriger, das Quadrat dieser neuen Zifer. Es ist also Alles wie vorhin, nur daß hier alle schon gefundenen Zifern das sind, was dort die erste war.

Die letzte Zifer der Wurzel, welche man auf diesem Wege findet, ist ein Einer; ihr Quadrat ist das niedrigste Product, welches von der gegebenen Zahl abgezogen wird. Dabey entdeckt es sich unfehlbar, ob diese eine genaue Quadratzahl ist, oder nicht; sobald die letzte Abziehung einen Rest übrig läßt, kann sie es nicht seyn, und die ganze Operation hat dann nur

gedient, eine ganze Zahl zu finden, deren Quadrat am wenigsten von ihr verschieden ist.

Die gewöhnlichen mechanischen Regeln des Verfahrens enthalten noch einige Abkürzungen, die sich leicht aus den obigen allgemeinen Gründen ableiten lassen. Es sind folgende:

a. Man theilt die gegebene Zahl in Classen, indem man, von unten anfangend, zu jeder Classe zwey Ziffern nimmt. Die höchste Classe darf auch eine einzige enthalten.

b. Man bestimmt die Zifer, deren Quadrat das größte ist, welches sich von der höchsten Classe abziehn läßt, verrichtet die Abziehung würklich, und setzt die Zifer als die höchste der gesuchten Wurzel.

c. Zu dem Reste setzt man bloß die nächste Classe herab, nimmt hierauf das Doppelte der gefundenen ersten Zifer, setzt es mit seiner niedrigsten Zifer unter die höchste der herabgesetzten Classe, und dividirt durch dasselbe den Theil des Restes, der gerade darüber steht.

d. Um zu prüfen, ob der gefundene Quotient die zweyte Zifer ist, setzt man ihn in die noch offene Stelle hinter dem Doppelten der ersten Zifer, und multiplicirt die ganze daraus entstehende Zahl mit ihm. Läßt sich das Product von dem vorliegenden Theile der gegebenen Zahl abziehn, so ist die zweyte Zifer richtig gefunden; wo nicht, so verkleinert man den Quotienten allmälig um Eins, so lange bis er jener Bedingung Genüge leistet.

e. Für den ferneren Verlauf der Operation gilt die Regel: man nehme jedesmal zu dem Reste, welcher bey der Entdeckung einer folgenden Zifer für die Wurzel geblieben ist, die nächstniedrigere Classe der gegebenen Zahl herunter, und verfahre mit der Zahl, welche die schon gefundenen Zifern der Wurzel darstellen, in Beziehung auf diesen Rest, wie man mit der ersten Zifer verfuhr, um die zweyte zu finden.

f. Man lasse die Zifern der Wurzel so auf einander folgen, wie sie allmälig aus den Classen gefunden werden, und vergesse nicht den Rest zu bemerken, welcher bey der letzten übrig bleibt.

3. Ausziehung der Quadratwurzel aus und in Brüchen.

Um aus einem Bruche die Quadratwurzel zu finden, muß man die des Zählers zum Zähler, die des Nenners zum Nenner eines neuen Bruchs machen; es werden dazu also zwey Operationen, jede mit einer ganzen Zahl, erfordert. Will man auch hier eine allgemeinere Aufgabe, die sich bey jedem Bruche auflösen läßt, so muß man sie so fassen: unter allen Brüchen, die einen beliebig festgesetzten Nenner führen, denjenigen zu finden, dessen Quadrat dem vorgegebenen am nächsten kommt. Vorher läßt sich der gegebene Bruch auf unzählig viele Arten in einen andern verwandeln, dessen Nenner eine genaue Quadratzahl von bekannter Wurzel ist, so daß also dann die ganze Untersuchung nur noch den umgewandelten Zähler trifft. Man bedient sich hier fast ausschließlich der Decimalbrüche; man verwandelt nemlich den gegebenen Bruch in einen

Decimalbruch, aber immer in einen solchen, dessen Nenner eine höhere Einheit von geradem Range ist, weil in diesem Falle die Wurzel aus dem Nenner selbst eine höhere Einheit, nur von halb so hohem Range, werden muß, mithin bloß aus dem Zähler die Wurzel in ganzen Zahlen auf die gewöhnliche Art ausgezogen zu werden braucht. Auf eben dem Wege kann man die Wurzel aus einer ganzen Zahl, die kein genaues Quadrat ist, durch einen Decimalbruch von bestimmtem Nennerrange ausdrücken, weil man die Zahl selbst, ohne ihren Werth zu ändern, in einen ähnlichen Bruch verwandeln kann. Man hängt zu diesem Zweck so viele Paare von Nullen an sie, als der vorgeschriebene Rang Einheiten enthält, und zieht daraus die Wurzel in ganzen Zahlen: sie ist der Zähler des gesuchten Decimalbruchs. Je höher der Nenner angenommen wird, um desto weniger kann sich das Quadrat des Bruches von der gegebenen Zahl unterscheiden.

4. Ueber die Bedeutung von Irrationalausdrücken.

Das Wort Zahl nimmt in fortschreitender Entwicklung der Arithmetik sehr bald in sofern eine erweiterte Bedeutung an, daß darunter auch ein solcher arithmetischer Ausdruck, in welchem an und mit gegebenen Zahlen genau vorgeschriebene Operationen gefordert sind, verstanden zu werden pflegt. Dieses darf unbedenklich geschehn, sobald die Gewißheit vorhanden ist, daß alle jene Operationen genau vollzogen werden können, und eine bestimmte Zahl als Resultat geben müssen.

Aber die Arithmetik führt auch, wie sich bey der Ausziehung der Quadratwurzel zum ersten Male zeigt,

auf Andeutungen, denen streng genommen keine bestimmte vollendete Zahl entspricht. Und gerade Formen dieser Art haben die höchste Wichtigkeit für den Hauptzweck der Zahlenwissenschaft: von würklichen Größen mittelbare Vorstellungen an die Hand zu geben.

Als willkührliche Hypothese würde die Annahme höchst unwahrscheinlich seyn, daß bey dem Messen einer Größe durch eine andere, ihr gleichartige, eine Unmöglichkeit existiren könnte, jemals einen aliquoten Theil der einen auszumitteln, wodurch sich die andere erschöpfend messen ließe. Und dennoch erhebt die Geometrie die Behauptung zur Gewißheit, daß es unzählig viele Größen gibt, die in dieser Beziehung, welche gegenseitige Incommensurabilität genannt zu werden pflegt, zu einander stehn.

Wenn Incommensurabilität einer Größe gegen ihr Maaß, oder ihre Einheit stattfindet, so kann jede würklich angestellte Messung derselben nur ein genähertes Resultat ergeben. Man wird das größte Vielfache des jedesmal gewählten aliquoten Theils der Einheit, welches in der zu messenden Größe enthalten ist, ausmitteln und angeben können, aber jedesmal ein Stück dieser Größe, kleiner als jener aliquote Theil, am Ende der Messung überschießend und unausgedrückt bleibend, zurücklassen müssen. In solchem Falle sind, für die Absicht eine vorliegende Größe zu bestimmen, unzählig viele, verschiedene, Messungen derselben möglich, weil sich unzählig viele verschiedene aliquote Theile der Einheit bilden lassen, von deren jedem erforscht werden kann, wie oft er aufs Höchste in jener Größe enthalten sey. Es scheint auf den ersten Blick für die Arithmetik hier nichts zu thun, als das Hergeben der Zahlen, die

das Resultat, soweit die jedesmalige Messung reicht, ausdrücken, wo denn also, für die nemliche Größe, so wie sich das Bedürfniß der approximativen Genauigkeit ihres Ausdrucks änderte, abgeleitet aus neuen Messungen, immer andere Zahlen nothwendig werden könnten.

Gibt es dagegen irrationale arithmetische Ausdrücke, das heißt solche, die ein Rechnen an gegebenen Zahlen fordern, dessen Resultat einer vorgeschriebenen Bedingung Genüge leisten soll, die von der Art ist, daß sie sich nie vollkommen erfüllen läßt; kann aber von jeder beliebig gewählten Zahl sogleich entschieden werden, ob sie zu groß oder klein ist, um jener Bedingung entsprechen zu können, so wird es auch möglich, überhaupt unter allen Zahlen einer gewissen beliebig gewählten Form (d. h. ganzen Zahlen oder Brüchen eines beliebig erwählten Nenners) jedesmal eine zu finden, die an jene Bedingung gehalten, ein Resultat gibt, welches weniger als das aus irgend einer der übrigen auf gleiche Art entspringende von Erfüllung der vorgeschriebenen Bedingung abweichen muß. Alsdann lassen sich Andeutungen dieser Art als Bezeichnungen incommensurabler Größen gebrauchen, und geben, sobald sie als solche zugelassen sind, die Möglichkeit an die Hand, ohne alles Messen, jeden Werth solcher Größen, soweit er durch unmittelbare Messung mit irgend einem beliebig gewählten aliquoten Theile der Einheit erreichbar ist, unfehlbar bloß auf dem Wege der Rechnung zu erhalten. Wenn man für eine würkliche Größe als arithmetische Angabe ihres Werths einen Irrationalausdruck aufstellt, so sagt dieses: wofern es möglich wäre, eine Zahl zu finden, die den Forderungen jenes Ausdrucks entspräche, so würde eben dadurch die Zahl ge-

funden seyn, die den Werth der genannten würklichen Größe genau darstellte; auf jeden Fall wird aber diejenige Zahl von beliebig gewählter Form, die am wenigsten von der Erfüllung der in dem Ausdrucke aufgestellten Forderungen abweicht, zugleich diejenige seyn, welche unter allen Zahlen derselben Form den Werth der anfangs genannten würklichen Größe am genauesten darstellt.

In sofern nun aus einem Irrationalausdrucke nach bestimmten arithmetischen Regeln sofort eine reelle, unzweydeutige Zahl jeder beliebigen Form abgeleitet werden kann, darf er gleichfalls eine Zahl genannt werden. Wenn aber eine weitere Verflechtung solcher Ausdrücke in Rechnungen geschehen soll, so darf der Umstand, daß sie nur abgebrochene Zahlen darbieten, nicht außer Acht gelassen werden.

Gewöhnliche Brüche, die sich in Decimalbrüche umwandeln sollen, und dessen streng genommen nicht fähig sind, haben in sofern Aehnlichkeit mit Irrationalausdrücken, als dasjenige, was sie verlangen, wenn es die Gestalt eines Decimalbruchs erhalten soll, gleichfalls nur durch eine abgebrochene Zahl näherungsweise geleistet werden kann, die jederzeit nicht um mehr als eine Einheit vom Range ihrer jedesmaligen letzten Zifer, zu klein ist.

5. Auflösung quadratischer Gleichungen, in denen eine unbekannte Zahl vorkommt.

Auf ähnliche Art, wie durch Hülfe der arithmetischen Grundoperationen die sogenannten einfachen Gleichungen sofort zur Lösung gebracht werden können, ist

es möglich, vorausgesetzt, daß sich aus jeder Zahl die Quadratwurzel ausziehn läßt, alle entwickelten Gleichungen vom zweyten Grade, die nur eine unbekannte Zahl enthalten mit Zuziehung der genanntin Operation aufzulösen.

Eine entwickelte Gleichung heißt diejenige, welche auf beyden Seiten nichts weiter darstellt, als Aggregate einfacher Glieder, d. h. solcher, die Producte von Factoren sind, deren jeder eine bekannte, oder unbekannte Zahl seyn kann. Das allgemeine Schema des einfachen Gliedes ist, unter x die unbekannte, unter a irgend eine bekannte, unter n eine beliebige ganze Zahl verstanden, ax^n, vorausgesetzt, daß in der Gleichung nur von einer unbekannten Zahl die Rede ist.

Eine entwickelte Gleichung vom zweyten Grade, oder eine quadratische, mit einer unbekannten Größe, heißt diejenige, in welcher auf beyden Seiten neben bekannten Gliedern nur solche unbekannte vorkommen, in denen entweder die erste, oder die zweyte Potenz der unbekannten Zahl, mit einer bekannten als Factor verbunden ist.

Setzt man also, durch Transposition (S. 61, 3.) alle unbekannten Glieder auf die eine Seite der Gleichung, alle bekannten auf die andere, und vereinigt man die gleichartigen unbekannten Glieder, so wird $ax^2 + bx = c$ das allgemeine Schema einer solchen Gleichung, oder noch einfacher, wenn man auf beyden Seiten durch a dividirt, und $\frac{b}{a} = f$, $\frac{c}{a} = g$ setzt, $x^2 + fx = g$.

Es ist aus der Theorie des Quadrirens klar, daß, sobald man in dieser Gleichung auf beyden Seiten

$(\frac{1}{2}f)^2$ hinzuaddirt, die auf ihrer ersten Seite stehende Größe $x^2 + fx + (\frac{1}{2}f)^2$ das genaue Quadrat einer zweytheiligen $x + \frac{1}{2}f$ wird, während die auf der anderen Seite $g + (\frac{1}{2}f)^2$, als Summe zweyer bekannten, selbst eine bekannte bleibt. Zieht man also, nachdem dies geschehen, die Gleichung folglich seyn wird:
$x^2 + fx + (\frac{1}{2}f)^2 = (x + \frac{1}{2}f)^2 = g + (\frac{1}{2}f)^2$,
aus den gleichen Größen auf beyden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man $x + \frac{1}{2}f = \sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)}$; eine Gleichung des ersten Grades, in der es nur einer Transposition bedarf, um $x = \sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)} - \frac{1}{2}f$ zu erhalten.

Bey versuchter Ausführung der Rechnungen, welche dieser Ausdruck andeutet, muß sich eine Widersinnigkeit ergeben, wenn g eine negative Zahl ist, die eine größere Menge als $(\frac{1}{2}f)^2$ enthält, denn alsdann verlangt $\sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)}$ die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl.

In allen anderen Fällen wird die verlangte Wurzelausziehung nicht widersinnig seyn, aber, seltene Ausnahmen abgerechnet, nur näherungsweise, als Irrationalausdruck, realisirt werden können.

Auf jeden Fall aber, da die Quadratwurzel aus einer bestimmten Zahl, sofern sie würklich der Größe nach angegeben werden kann, auf gleiche Weise als positiv und negativ gedacht werden darf (S. 74.), wird auch jedesmal das gesuchte x, je nachdem man der Zahl, welche das erste Glied seines Werths ausmachen soll, d. h. derjenigen, welche $\sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)}$, der

Größe nach, darstellt, das + oder das — Zeichen vorsetzt, ehe man mit ihr das zweyte Glied, — ½ f, verbindet, zwey verschiedene Werthe erhalten. Durch diese Eigenschaft, daß sich, wenn überhaupt lösbar, für die unbekannte Zahl zwey verschiedene Werthe ergeben müssen, unterscheiden sich die quadratischen Gleichungen von denen des ersten Grades auf wesentliche Art.

Die allgemeine Arithmetik, gestützt auf eine umfassende Theorie der Potenzirung und Wurzelausziehung, kann Untersuchungen über die Lösung von Gleichungen nach höheren Prinzipien unternehmen.

Zweytes Capitel.

Erhebung zum Cubus und Ausziehung der Cubicwurzel.

I. Erhebung zum Cubus.

Ein Product aus drey gleichen Factoren heißt Cubus, oder dritte Potenz, eines solchen Factors, und dieser selbst wird in sofern die Wurzel des Cubus genannt.

Zum Cubiren wird also nichts als Multiplication erfordert; und die folgenden Sätze sind lediglich aus dem Begriffe dieser Operation abgeleitet.

1. Der Cubus einer Zahl hat mit ihr einerley Zeichen $(+ a)^3 = + (a^3)$; $(- a)^3 = - (a^3)$.

2. Der Cubus eines Products ist ein Factum aus den Cubis seiner Factoren $(a\,b)^3 = (a^3) \cdot (b^3)$.

3. Der Cubus eines Bruchs wird erhalten, wenn man den Cubus seines Zählers zum Zähler, den seines Nenners zum Nenner eines neuen Bruchs macht

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}.$$

Ist die Wurzel eine ganze Zahl, so wird es der Cubus auch, eben so wie ein Bruch, wenn er in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, einen ähnlichen Bruch zum Cubus hat.

4. Um die Regel zu finden, nach der, aus den Elementen einer vieltheiligen Größe, der Cubus derselben gebildet werden kann, nehme man eine Größe a an, deren Cubus a^3 schon als bekannt vorausgesetzt wird, lasse sie um Etwas, b, wachsen, und untersuche, um wieviel der Cubus dieser neuen Größe $(a + b)^3$ über den von a allein hinaus vermehrt worden ist. Die Rechnung gibt

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3,$$

und es läßt sich daraus leicht abstrahiren, wie die drey Producte, welche außer a^3 in diesem Ausdrucke liegen, aus der Größe a, und ihrem neu hinzugekommenen Theile b gebildet werden müssen. Man kann durch Hülfe der in dieser Formel dargestellten Regel allmälig den Cubus jeder vieltheiligen Größe berechnen, indem man nach und nach jeden folgenden Theil derselben als b, und den Inbegriff der ihm vorhergehenden, wovon man den Cubus schon hat, als a betrachtet.

Wenn man von dieser Methode beym Cubiren vielzifriger Zahlen Gebrauch machen will, so muß man auch die Rangfolge der einzelnen Producte, welche dabey zum Vorschein kommen, mit in Erwägung ziehn. Alsdann wird a die höchste Zifer, oder der Inbegriff mehrerer von den höchsten Zifern der Wurzel, b aber allemal eine einzelne, nächstniedrige bedeuten, und es ist offenbar, daß von den oben angegebenen Producten für $(a + b)^3$ jedes folgende um einen Rang niedriger werden muß, als das vorhergehende. Indem man also zu Anfang den Cubus der höchsten Zifer ohne weitere Rangbestimmung, jedes folgende Product aber, in der Ordnung wie es der Formel gemäß gefunden wird, um eine Stelle niedriger als das vorhergehende setzt, bis man endlich zu dem niedrigsten von allen, dem Cubus der letzten Zifer, kommt, welcher in die Stelle der Einer gehört, beobachtet man Alles, was in Absicht auf die dem Range gemäße Stellung der verschiedenen Producte gefordert werden kann.

Der Cubus einer Zifer wird allemal im Grade dreyfach höher als sie selbst, den Cubus des Einers nicht ausgenommen, der selbst wieder Einer enthalten wird. Daher stehen von zwey Zifern, die in der Wurzel unmittelbar auf einander folgten, die Cubi um drey Stellen auseinander, und man darf behaupten, daß es in dem Cubus so viele Stellen gibt, deren Index sich durch 3 ohne Rest dividiren läßt, als Zifern in der Wurzel. Man kann hinzusetzen, daß im Cubus nicht mehr solche Stellen möglich sind. Denn man nehme eine einzelne Einheit, um einen Grad höher als die höchste Zifer der Wurzel; ihr Cubus wird um drey Stellen höher zu stehn kommen als der Cubus jener

Ziffer, übrigens aber die kleinste Zahl vorstellen, die mit so viel Stellen geschrieben werden kann. Reichte der Cubus der gegebenen vielzifrigen Zahl eben so weit hinauf, so stellte er unfehlbar eine größere Zahl dar, als der Cubus jener Einheit, welches unmöglich ist, da eine Zahl von höherem Range allemal die größere ist, also auch den größeren Cubus hat.

II. Ausziehung der Cubicwurzel.

Die Cubicwurzel, oder die Wurzel des dritten Grades aus einer Zahl ziehn, heißt sie als ein Product aus drey gleichen Factoren betrachten und die Größe eines solchen Factors bestimmen. Ihr Zeichen ist $\sqrt[3]{}$.

1. Möglichkeit der Cubicwurzel.

Die erste Untersuchung trifft die Möglichkeit dieser Operation. In Absicht auf das Zeichen findet sich hier kein Hinderniß. Der Cubus einer positiven Zahl ist positiv, einer negativen negativ, woraus rückwärts für die Cubicwurzel, wenn sie nur der Größe nach bestimmt werden kann, eben dasselbe folgt. Die Cubicwurzel aus einem Bruche findet sich (I, 3.), indem die Cubicwurzel des Zählers zum Zähler, die des Nenners zum Nenner eines neuen Bruchs gemacht wird. Es kommt also Alles darauf an, ob sich aus jeder ganzen Zahl die Cubicwurzel angeben läßt. Diese Frage muß verneinend beantwortet werden. Man nehme zwey um Eins verschiedene ganze Zahlen; ihre Cubi weichen allemal um mehrere Einheiten von einander ab. Eine ganze Zahl, die zwischen ein paar solchen Cubis liegt,

hat also zur Cubicwürzel keine ganze Zahl. Eben so wenig darf man einen unechten Bruch, der zwischen zwey ganzen Zahlen liegt, dafür annehmen, denn der Cubus eines solchen ist selbst ein unechter Bruch von derselben Art. Mithin hat eine solche Zahl überall keine Cubicwurzel, und es wird hier, wie bey der Quadratwurzel, eine Mannichfaltigkeit von irrationalen Ausdrücken geben.

2. Cubicwurzeln aus und in ganzen Zahlen.

Man faßt auch die Aufgabe der Cubicwurzelausziehung aus einer ganzen Zahl unter die allgemeinere, immer auflösbare: die größtmögliche ganze Zahl zu finden, deren Cubus in einer gegebenen ganzen Zahl enthalten seyn kann, und nennt dieses Verfahren Ausziehung der Cubicwurzel in ganzen Zahlen. Die dabey zu beobachtende Methode findet nur da ihre Anwendung, wo die gesuchte Wurzel mehr als eine Zifer enthalten muß. Von den Zahlen, die zwischen 1 und 1000 liegen, denen also der Cubus einer einfachen Zifer am nächsten kommt, verlangt man, daß ihre Cubicwurzel bekannt sey, oder durch unmittelbare Versuche gefunden werde. Hingegen jede Zahl, die 1000 überschreitet, enthält den Cubus einer mehrzifrigen Wurzel. Ist es nur darum zu thun, die Menge von Stellen, welche in der Wurzel liegen müssen, zu bestimmen, so bemerke man die Anzahl der Stellen in der gegebenen Zahl, deren Indices durch 3 theilbar sind (I, 4.). Will man aber die Zifern der Wurzel würklich finden, so muß man sich erinnern, wie allmälig aus ihnen durch Zusammenstellung mannichfaltiger Producte der Cubus

entstanden seyn kann, weil auf diesem Wege eine von den Zifern der Wurzel nach der andern gefunden werden muß. Dabey muß man immer die Bedingung festhalten, daß die Zahl, welche man sucht, die größtmögliche seyn soll, deren Cubus von der gegebenen abgezogen werden kann, woraus sich von selbst ergibt, daß jede höhere Zifer ohne Rücksicht auf die niedrigern, noch unbekannten, so groß als möglich genommen werden darf.

Mit der Bestimmung der höchsten Zifer für die Wurzel macht man den Anfang, und zwar folgendermaaßen. Man sucht in der gegebenen Zahl die höchste Stelle auf, deren Index durch 3 theilbar ist; bis auf sie geht der Cubus der höchsten Zifer hinab. Man nimmt also den Theil der Zahl, der sich mit dieser Stelle endigt, und höchstens dreyzifrig seyn kann, und erforscht durch unmittelbare Versuche, welches die größte Zifer seyn mag, deren Cubus in ihm liegt. Sie ist die erste und höchste der gesuchten Wurzel. Den ganzen ferneren Verlauf der Operation kann man unter folgender allgemeinen Regel zusammenfassen. Es bedeute a die schon gefundene höchste Zifer der Wurzel, oder den Inbegriff mehrerer von der höchsten an; es sey a^3 würklich von der vorliegenden Zahl an der gehörigen Stelle abgezogen, es wird nun verlangt, eine neue nächstniedrigere Zifer der Wurzel, die b heißen mag, zu finden. Zu dem Reste, welcher bey der Abziehung von a^3 blieb, und von demselben Range wie a^3 ist, nehme man die drey nächstniedrigeren Zifern der gegebenen Zahl, so hat man denjenigen Theil von ihr, in welchem die drey Producte $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 liegen müssen, die wegen des neuen Theils der Wurzel b

zum Cubus hinzugekommen sind. Man sieht auch, welchen Bedingungen b unterworfen ist; es muß unter der Voraussetzung, daß die Summe der obigen drey Producte, wenn jedes von ihnen würklich berechnet und in eine um Eins niedrigere Stelle als das vorhergehende gesetzt wird, sich würklich von dem vorliegenden Theile der gegebenen Zahl abziehn läßt, so groß als möglich seyn. Um b diesen Umständen gemäß zu finden, kann der folgende Kunstgriff angewandt werden, welcher zur Ersparung vergeblicher Versuche sehr zweckmäßig ist. Man sondere von dem Theile der vorliegenden Zahl, in welchem die genannten drey Producte liegen, die beyden letzten Ziffern ab, so hat man, in dem was übrig bleibt, denjenigen Theil, in welchem allein das erste von jenen drey Producten, $3a^2b$, enthalten seyn kann. Folglich ist der höchste Werth, den b haben kann, die ganze Zahl, welche herauskommt, indem man eben diesen Theil durch $3a^2$ dividirt. Man kann dies thun, da a schon bekannt ist, und sich daraus $3a^2$ berechnen läßt. Aber der gefundene Quotient kann größer werden, als b eigentlich seyn sollte. Daher muß man ihn an die oben vorgeschriebene Bedingung halten, das heißt, man muß ihn für b annehmen, die drey Producte $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, berechnen, und ihrem Range gemäß vereinigen. Läßt sich die Summe von dem vorher abgesonderten Theile der gegebenen Zahl abziehn, so ist jener Quotient würklich die gesuchte folgende Ziffer b, wo nicht, so muß man ihn so lange allmälig jedesmal um Eins verringern, bis er jene Bedingung erfüllt. So findet sich durch einen sich selbst immer gleichen Mechanismus jede folgende Ziffer der Wurzel; erst wenn man die letzte Ziffer der-

selben gefunden, und die aus ihr herrührenden Producte abgezogen hat, entdeckt sich's, ob die gegebene Zahl eine genaue Cubiczahl ist. Die gewöhnlichen mechanischen Regeln dieser Operation stimmen ganz mit dem vorgeschriebenen Verfahren überein, sie enthalten keine weitere Abkürzung, man mögte denn die Eintheilung der gegebenen Zahl in Classen, von denen jede, die höchste abgerechnet, drey Zifern enthält, wo also jede folgende Classe dient eine folgende Zifer der Wurzel zu finden, dafür annehmen wollen *).

3. Cubicwurzeln aus und in Brüchen.

Die Ausziehung der Cubicwurzel aus einem Bruche kommt auf die Ausziehung derselben aus einer ganzen Zahl zurück; denn man kann jeden Bruch durch eine leichte Verwandlung dahin bringen, daß sein Nenner eine genaue Cubiczahl wird. Dabey faßt man die Aufgabe allemal so, daß unter allen Brüchen eines vorgeschriebenen Nenners derjenige gefunden werden soll, dessen Cubus sich am wenigsten von dem vorgegebenen unterscheidet. Auch hier ist der Gebrauch der Decimalbrüche allgemein. Sucht man die Wurzel in Decimalbrüchen eines gegebenen Grades, so verwandelt man den vorliegenden selbst in einen Decimalbruch von drey-

*) Ueberhaupt ist die Ausziehung der Cubicwurzel, sobald mehrere Zifern dabey gefunden werden sollen, eine sehr beschwerliche Operation, und es ist ein großer Gewinn, daß man durch die Logarithmen, wie sich nachher zeigen wird, in den Stand gesetzt ist, diese und ähnliche Rechnungen, so weit sie gebraucht werden, viel leichter zu führen.

lich höherem Grade. Alsdann braucht man die Cubicwurzel aus seinem Zähler in ganzen Zahlen zu ziehn, sie wird der Zähler der gesuchten Wurzel seyn. Man kann sich dieses Verfahrens bedienen, um die Cubicwurzel aus einer ganzen Zahl in Brüchen eines vorgeschriebenen Nenners auszudrücken, denn man kann sie selbst noch vorher in einen verwandeln, dessen Nenner die dritte Potenz desjenigen ist, den ihre Wurzel führen soll, und alsdann aus dem Zähler dieses Bruchs auf die gewöhnliche Weise die Cubicwurzel in ganzen Zahlen ausziehn, um den Zähler der gesuchten Wurzel zu bekommen. Da auch hier immer Decimalbrüche gefordert werden, so kann man sich folgendes als Regel merken. Soll aus einer ganzen Zahl die Cubicwurzel durch den größtmöglichen Decimalbruch eines vorgeschriebenen Nenners angegeben werden, so hänge man an sie so viel Classen, jede drey Nullen enthaltend, als der Grad des Nenners Einheiten hat, und ziehe daraus die Cubicwurzel in ganzen Zahlen; sie ist der Zähler des verlangten Bruchs.

Drittes Capitel.

Allgemeine Sätze über Potenziirung und Wurzelausziehung.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß durch die nemliche Methode, welche für die beyden ersten und einfachsten Fälle im Vorhergehenden angewendet ist, auch Potenziirungen höherer Grade sich auf bestimmte Regeln zurückbringen lassen, so daß Ausdrücke, in denen sie

$(\frac{1}{2}f)^2$ hinzuaddirt, die auf ihrer ersten Seite stehende Größe $x^2 + fx + (\frac{1}{2}f)^2$ das genaue Quadrat einer zweytheiligen $x + \frac{1}{2}f$ wird, während die auf der anderen Seite $g + (\frac{1}{2}f)^2$, als Summe zweyer bekannten, selbst eine bekannte bleibt. Zieht man also, nachdem dies geschehen, die Gleichung folglich seyn wird: $x^2 + fx + (\frac{1}{2}f)^2 = (x + \frac{1}{2}f)^2 = g + (\frac{1}{2}f)^2$, aus den gleichen Größen auf beyden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man $x + \frac{1}{2}f = \sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)}$; eine Gleichung des ersten Grades, in der es nur einer Transposition bedarf, um $x = \sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)} - \frac{1}{2}f$ zu erhalten.

Bey versuchter Ausführung der Rechnungen, welche dieser Ausdruck andeutet, muß sich eine Widersinnigkeit ergeben, wenn g eine negative Zahl ist, die eine größere Menge als $(\frac{1}{2}f)^2$ enthält, denn alsdann verlangt $\sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)}$ die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl.

In allen anderen Fällen wird die verlangte Wurzelausziehung nicht widersinnig seyn, aber, seltene Ausnahmen abgerechnet, nur näherungsweise, als Irrationalausdruck, realisirt werden können.

Auf jeden Fall aber, da die Quadratwurzel aus einer bestimmten Zahl, sofern sie würklich der Größe nach angegeben werden kann, auf gleiche Weise als positiv und negativ gedacht werden darf (S. 74.), wird auch jedesmal das gesuchte x, je nachdem man der Zahl, welche das erste Glied seines Werths ausmachen soll, d. h. derjenigen, welche $\sqrt{(g + (\frac{1}{2}f)^2)}$, der

Größe nach, darstellt, das + oder das — Zeichen vorsetzt, ehe man mit ihr das zweyte Glied, — ½ f, verbindet, zwey verschiedene Werthe erhalten. Durch diese Eigenschaft, daß sich, wenn überhaupt lösbar, für die unbekannte Zahl zwey verschiedene Werthe ergeben müssen, unterscheiden sich die quadratischen Gleichungen von denen des ersten Grades auf wesentliche Art.

Die allgemeine Arithmetik, gestützt auf eine umfassende Theorie der Potenziirung und Wurzelausziehung, kann Untersuchungen über die Lösung von Gleichungen nach höheren Prinzipien unternehmen.

Zweytes Capitel.

Erhebung zum Cubus und Ausziehung der Cubicwurzel.

I. Erhebung zum Cubus.

Ein Product aus drey gleichen Factoren heißt Cubus, oder dritte Potenz, eines solchen Factors, und dieser selbst wird in sofern die Wurzel des Cubus genannt.

Zum Cubiren wird also nichts als Multiplication erfordert; und die folgenden Sätze sind lediglich aus dem Begriffe dieser Operation abgeleitet.

1. Der Cubus einer Zahl hat mit ihr einerley Zeichen $(+ a)^3 = + (a^3)$; $(- a)^3 = - (a^3)$.

jedem Factor desselben, so, daß die Resultate als Factoren eines neuen Products zusammentreten.

$$\sqrt[n]{(a \cdot b)} = (\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{b}).$$

3. Denkt man jene Factoren als gleich, so ergibt sich der Satz: daß die Ordnung, in welcher an einer beliebigen Zahl zwey Operationen, wovon die eine Potenziirung, die andere Wurzelausziehung, jede von eigenthümlichem willkührlichem Grade, seyn mag, vollzogen werden, für den Werth des Resultats gleichgültig bleibt.

$$\sqrt[3]{(a)^4} = \sqrt[3]{(a \cdot a \cdot a \cdot a.)} = (\sqrt[3]{a}) \cdot (\sqrt[3]{a}) \cdot (\sqrt[3]{a}) \cdot (\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{(a)^4}.$$ Allgemein:

$$\sqrt[n]{(a)^r} = (\sqrt[n]{a})^r.$$

Nennt man also einen Ausdruck, wenn die letzte in ihm verlangte Operation Potenziirung ist, eine Potenz; wenn dieselbe Wurzelausziehung seyn soll, eine Radicalgröße, so hängt es von der Willkühr ab, ob man $\sqrt[n]{a^r}$ als das Erste, oder als das Zweyte betrachten will.

4. Potenziirung sowohl, als Wurzelausziehung an einem Bruche geschieht durch gleichmäßiges Operiren an dessen Zähler und Nenner, so daß die Resultate dieselben Functionen behalten, welche die Zahlen hatten, aus denen sie entstanden sind.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Jede Potenz eines echten Bruchs wird ein kleinerer echter Bruch, jede eines unechten ein größerer unechter, als er selbst war.

Die obigen Sätze 2 und 4 können auch in umgewendeter Ordnung der in ihnen gleichgesetzten Ausdrücke zur Vereinfachung von Andeutungen dienen.

5. Nur diejenigen Potenziirungen, und also auch diejenigen Wurzelausziehungen, bedürfen ursprünglicher Regeln, deren Grade Primzahlen sind. Ist der Grad einer verlangten Potenz eine aus Factoren zusammengesetzte Zahl, so braucht man nur an der ursprünglichen Wurzel die Potenziirung zu vollziehen, deren Grad der erste Factor jener Zahl vorschreibt; an dem Resultate eine neue Potenziirung, deren Grad durch den zweyten Factor derselben Zahl bestimmt wird u. s. w.: $a^{mn} = (a^m)^n$.

Umgekehrt also wird man eine Wurzelausziehung, deren Grad eine aus Factoren zusammengesetzte Zahl ist, auf successive in einander greifende niedrigere Wurzelausziehungen, deren Grade jene Factoren sind, zurückbringen können. $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}$. So würden z. B. weder für die Wurzelausziehung des 4ten, noch die des 6ten Grades ursprüngliche Regeln nöthig seyn, da $\sqrt[4]{a} = \sqrt{(\sqrt{a})}$, und $\sqrt[6]{a} = \sqrt{(\sqrt[3]{a})}$ gesetzt werden darf.

Diese Sätze sind auch in umgewendeter Beziehung erheblich, und ergeben in solcher: daß Potenziirung einer Potenz, d. h. Multiplication ihres Exponenten mit dem Grade jener Potenziirung; Wurzelausziehung aus einer Radicalgröße durch Multiplication ihres Wurzelgrades mit dem Grade der aus ihr selbst ferner zu ziehenden Wurzel angedeutet werden könne.

6. **Ausdrücke, welche zugleich als Potenzen und Radicalgrößen gelten können, besitzen die merkwürdige Eigenschaft, daß sie ohne Schaden ihres Werthes unzählig viele verschiedene Formen anzunehmen vermögen.**

Soll an einem solchen Ausdruck eine Potenziirung vollzogen werden, so betrachte man ihn, laut 3, als Potenz, und multiplicire, laut 4, deren Grad mit dem Grade der neu verlangten.

$$(\sqrt[n]{a^r})^s = \left((\sqrt[n]{a})^r\right)^s = (\sqrt[n]{a})^{r.s}$$

Soll nachher an diesem Resultate eine Wurzelausziehung des nemlichen Grades vollführt werden, so nehme man ihn als Radicalgröße, $\sqrt[n]{(a^{rs})}$, und vollziehe an ihr, laut 4, die geforderte Wurzelausziehung, indem man durch deren Grad den ihrigen multiplicirt.

$$\sqrt[ns]{(a^{rs})}.$$

Es werden also durch Vollziehung beyder Operationen, welche nichts thun, als sich gegenseitig aufheben, die beyden Grade, die der anfängliche Ausdruck enthält, der eine: Grad der in ihm verlangten Potenz, der andere: Grad der gleichfalls in ihm geforderten Wurzel, beyde durch dieselbe dritte, willkührlich gewählte, Zahl multiplicirt, der Werth des Ausdrucks aber bleibt ungeändert.

$$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{rs}}.$$

Umgekehrt folglich, sofern die Quotienten selbst wieder ganze Zahlen werden, ist es erlaubt, die beyden Grade in dem Ausdrucke einer Größe, die zugleich als Potenz und Radicalgröße angesehen werden kann, durch eine beliebige dritte Zahl zu dividiren.

Man bedient sich namentlich des ersten Verfahrens, um zwey oder mehrere Radicalgrößen, bey deren jeder

eine eigenthümliche Zahl als Grad der in ihr verlangten Würzelausziehung auftritt, ohne Aenderung ihres Werthes so umzuformen, daß nachher in ihnen die Grade der geforderten Wurzelausziehungen als gleiche erscheinen. Man verfährt bey jeder mit dem Grade der Potenziirung und dem der Wurzelausziehung, der in ihr vorkommt, als wenn sie Zähler und Nenner eines Bruchs wären, und als wenn die dadurch gegebenen Brüche auf gleiche Benennung gebracht werden sollten.

$\sqrt[n]{a^r}$ und $\sqrt[m]{b^s}$ werden auf diese Art:

$\sqrt[mn]{a^{rm}}$ und $\sqrt[mn]{b^{sn}}$.

Weitere Vorschriften für Potenziirungen, Wurzelausziehungen und Verbindungen dieser Operationen bleiben der allgemeinen Arithmetik vorbehalten; doch haben die nachstehenden Sätze, den quantitativen Erfolg solcher Operationen in gewissen Fällen betreffend, auch für die Elementararithmetik Interesse.

7. Wenn eine positive Zahl mehr als 1 beträgt, so kann man durch Potenziirung derselben, unter gestatteter beliebiger Steigerung des Exponenten, ein Resultat erhalten, welches über jede noch so beträchtliche Größe hinausgeht; wenn sie weniger als 1 ausmacht, auf gleichem Wege, ein Resultat, das unter jede noch so geringe Kleinheit herabsinkt.

Sey sie zuerst mehr als 1, also $(1 + b)$. Wenn man eine Potenz von ihr, $(1 + b)^n$, berechnet, so ist deren Werth unfehlbar mehr, als $1 + nb$. Denn falls bey den successiven Multiplicationen, wodurch Potenzen von $1 + b$ entstehen, jedesmal das letzte der sich dabey ergebenden, sämmtlich positiven Partialpro-

ducte, weggelassen wird, so erhält man zu wenig. Auf diese Art würde für $(1+b)^2$ kommen $1+2b$, für $(1+b)^3$ entstehen $1+3b$. Allgemein, wenn für $(1+b)^r$ erhalten wäre $1+rb$ und man nun beydes mit $1+b$ multiplicirte, dabey aber das letzte diesseits entstehende Partialproduct wegließe, würde $1+rb+b=1+(r+1)b$ entspringen, woraus die Richtigkeit des Satzes im Fortgange der Rechnung klar ist.

Da nun $1+nb$ weniger beträgt, als $(1+b)^n$, und dieses, was auch b seyn mag, mit gesteigertem n über jede Größe hinauswachsen kann, so ist Gleiches um so mehr mit $(1+b)^n$ der Fall.

Beträgt aber die Zahl weniger als 1, so ist sie ein echter Bruch $\frac{a}{c}$, gibt also umgekehrt einen unechten Bruch $=\frac{c}{a}=1+b$. Daß dieser durch Potenziirung über jede Größe hinaus gesteigert werden kann, ist eben bewiesen. Es wird also

$$\frac{1}{(1+b)^n}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^n}=\left(\frac{a}{c}\right)^n$$

mit zunehmendem n unter jeder Kleinheit von bestimmtem Betrage herabgebracht werden können.

8. Ist eine positive Zahl größer als 1, so wird die neue positive Zahl, welche die Wurzel irgend eines Grades aus ihr genähert darstellt, es gleichfalls seyn, aber, mit steigendem Grade abnehmend, der Einheit so nahe kommen können, als man will; ist sie ein echter

Bruch, so muß jede Wurzel von ihr auch ein echter Bruch werden und, mit wachsendem Exponenten gleichfalls zunehmend, der Einheit über jede bestimmte Grenze genähert werden können.

Sey die Zahl größer als 1, also $1 + b$. Setzte man eine andere $= (1 + \frac{b}{n})$, so würde nach dem vorigen Satze $(1 + \frac{b}{n})^n$ mehr betragen, als $1 + \frac{n.b}{n}$ $= 1 + b$, also $1 + \frac{b}{n}$ größer seyn, als die $\sqrt[n]{1+b}$.

Aber $1 + \frac{b}{n}$ kann mit steigendem n so nahe an 1 rücken, als man will, um so mehr also $\sqrt[n]{(1 + b)}$.

Ist hingegen die Zahl kleiner als 1, so muß sie ein echter Bruch seyn. Das Umgekehrte desselben ist also ein unechter; die Wurzel aus ihm kann also mit steigendem Grade der 1 beliebig nahe rücken; sein Zähler und sein Nenner können also der Gleichheit so nahe kommen, als man will; folglich auch kann der Bruch, der dieselben Zahlen, nur in umgekehrter Ordnung, zu Zähler und Nenner erhält, der Einheit so nahe gebracht werden, als man verlangt.

Viertes Capitel.

Allgemeiner Begriff der Potenz, und Grundregeln der Potenzenrechnung.

A. Erweiterung des Potenzbegriffs.

Die dritte Hauptaufgabe, wozu die Idee der Potenz Veranlassung darbietet, ruht in der Frage: ob nicht eine beliebig gewählte Zahl Potenz einer anderen willkührlich angenommenen seyn könne.

Es tritt auf den ersten Anblick hervor, daß auch hier, sofern reelle Bedeutung, im Allgemeinen statthabend, beabsichtigt wird, nur von positiven Zahlen die Rede seyn darf, indem einzig alsdann das Zeichen, welches beyde Zahlen führen, kein Hinderniß der verlangten Beziehungen abgibt, während: eine negative Zahl als Potenz einer positiven zu betrachten, oder umgekehrt: eine positive als Potenz einer negativen zu denken, oft widersinnig und auf keinen Fall im Allgemeinen zulässig seyn würde.

Aber selbst unter der Voraussetzung, daß Grundfactor und Potenz positive Zahlen seyn sollten, würde die Aufgabe nur in sehr wenigen Fällen lösbar seyn, wenn keine Erweiterung des Potenzbegriffs möglich wäre, die ihn über ein bloßes wiederholtes Setzen des angenommenen Grundfactors hinaus erstreckte, so wie überhaupt alsdann der Gebrauch, welchen die Form der Potenz gestattete, sich auf wenige isolirte Zahlen beschränken würde. Auf ähnliche Weise aber wie der Begriff der Zahl anfangs bloß unter der Form des wieder-

holten Setzens der Einheit erscheint, sich aber weiterhin zum Ausdruck einer allgemeinen Regel ausbildet, nach welcher aus der gegebenen Einheit durch Setzen und Verknüpfen von Theilen Zusammenfassungen von solchen gestiftet werden können, ist auch der Begriff der Potenz fähig, dahin erweitert zu werden, daß er sich als Darstellung der Regel, nach welcher überhaupt aus einem gegebenen Grundfactor durch Setzen und Verknüpfen von Factoren ein Product erzeugt werden soll, nachweisen, und auf diese Art zu größerem Umfange bringen läßt. Erst nachdem dieses geleistet worden, kann man einen Inbegriff allgemeiner Regeln für die Potenzenrechnung entwickeln, die Aufgabe der Exponentiation erledigen, und die Potenzenrechnung zu einer umfassenden Methode für die Arithmetik erheben.

Bey Bildungen, die aus einer gegebenen Größe eine andere entspringen lassen, unter der Voraussetzung, daß nur von Setzen, Erzeugen, Verknüpfen gleicher Theile dabey die Rede seyn soll, kommt zuerst wiederholtes Setzen dieser Größe, weiterhin Zerlegen derselben in gleiche Theile, und später die Idee, daß auch zu jeder Größe, sofern ein Verknüpfen von Theilen beabsichtigt wird, eine ihr widerstreitende gefunden, und deren Vorstellung aus der ihrigen abgeleitet werden könne, zur Ausführung.

Bey Formationen, die aus einem gegebenen Grundfactor gemacht werden, so daß nur ein Setzen, Erzeugen, Verknüpfen von gleichen Factoren dabey vorgehn soll, lassen sich vollkommen ähnliche Beziehungen correspondirend nachweisen. Dem wiederholten Setzen als Theil, na, steht das wiederholte Setzen als Factor, a^n, gegenüber; dem Zerlegen in eine bestimmte Anzahl

gleicher Theile (Division durch n) correspondirt das Zerfällen in eben so viele gleiche Factoren (Wurzelausziehung des nten Grades). Dem ursprünglichen Widerstreit, bey welchem zwey Größen, als Theile verknüpft, sich gegenseitig vernichten (Widerstreit im Sinne der Addition), ist vollkommen ähnlich die Beziehung zwischen zwey Zahlen, vermöge welcher sie sich gegenseitig aufheben, wenn sie als Factoren in einem Producte zusammentreten (Widerstreit im Sinne der Multiplication). Man kann namentlich den letzteren jedesmal sehr leicht nachweisen. Da bekanntlich $b \cdot a \cdot \frac{1}{a} = b$; so sind offenbar die beyden Zahlen a und $\frac{1}{a}$, weil sie sich als Factoren des vorliegenden Products völlig gegen einander gehoben haben, sich gegenseitig vernichtend. Oder da $b \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a} = b$, so darf man behaupten: eine Zahl, welche im Sinne der Multiplication das sich mit einem beliebigen Bruche $\frac{a}{c}$ Vernichtende seyn soll, bestehe in einem anderen Bruche, bey dessen Bildung sich nur Zähler und Nenner des ersten verwechselt haben, $\frac{c}{a}$. Diese Regel faßt auch den ersten Fall unter sich, da jede ganze Zahl als Bruch vom Nenner, angesehn werden kann.

Wenn es also darauf ankommt, für Erzeugungen von Producten, die aus einem gegebenen Grundsfactor entspringen sollen, bestimmte Regeln anzugeben, so sind die ursprünglichen Zahlen selbst, weil sie nichts anderes anzeigen, als bestimmte Acte des Setzens und Verknü-

pfens von Theilen, die aus der Einheit abgeleitet werden, zu dieser Absicht vollkommen geeignet, sobald nur festgesetzt wird, daß diese Acte bey einem beabsichtigten Setzen und Verknüpfen von Factoren genau nachgeahmt werden sollen. Die verschiedenen Formen, unter denen ursprüngliche Zahlen erscheinen, geben alsdann zu eben so vielen verschiedenen Formen, unter denen Bildungen von Producten aus einem Grundfactor geschehn können, Veranlassung.

Diesem gemäß soll: eine Zahl, als Wurzel oder Grundfactor, zur Potenz eines beliebigen Exponenten erheben, so viel heißen als: aus ihr durch Setzen und Verknüpfen von Factoren ein Product erzeugen, auf die nemliche Art, wie sich der angenommene Exponent aus der Einheit durch Setzen und Verknüpfen von Theilen gebildet hat.

Da der Exponent unter den vier Formen der positiven ganzen Zahl, des positiven Bruchs, der negativen Zahl, des negativen Bruchs, erscheinen kann, so bilden sich nachfolgende vier Hauptgestalten der Potenz.

α. Der Exponent ist eine positive ganze Zahl. Da er in diesem Falle durch wiederholtes Setzen von Theilen, deren jeder der Einheit gleich ist, entsteht, so wird, was jederzeit unbedingt möglich ist, nur ein eben so vielmaliges Setzen von Factoren, deren jeder dem Grundfactor gleich ist, nöthig seyn, um den Bedingungen der Annahme zu genügen.

β. Der Exponent der Potenz, $a^{\frac{m}{n}}$, ist ein Bruch, $\frac{m}{n}$. Jeder Bruch bedarf zu seiner Entstehung zweyer

ursprünglichen Acte. Man hat die gegebene Einheit zu nehmen, sie zuvörderst in so viel gleiche Theile zu zerlegen, als der Nenner des Bruchs, n, anzeigt, und hernach einen dieser Theile so oft als Theil zu setzen, wie es der Zähler, m, vorschreibt. Man wird folglich, um diese Acte bey der beabsichtigten Erzeugung eines Products aus dem gegebenen Grundfactor möglichst nachzuahmen, diesen Grundfactor nehmen, ihn zuvörderst in so viel gleiche Factoren zerlegen, als der Nenner des Exponenten anzeigt, um nachher einen davon, $\sqrt[n]{a}$, so oft selbst wieder als Factor zu setzen, wie es der Zähler des Exponenten vorschreibt $(\sqrt[n]{a})^m$.

Ausdrücke dieser Art sind offenbar im Allgemeinen hypothetisch, indem sie die Möglichkeit voraussetzen, daß jede beliebig gewählte Zahl, a, in so viele gleiche Factoren als man will, zerlegt werden könne. Sie würden widersinnig werden, wenn nicht jede Operation dieser Art, d. h. jede Wurzelausziehung, möglich wäre; oder zweydeutig, wenn ihr Resultat auf mehr als eine Art bestimmt werden könnte.

γ. Wenn der Exponent der Potenz, a^{-m}, eine negative ganze Zahl ist, mithin aus der ursprünglichen Einheit entstanden, indem aus ihr (+ 1) eine andere Größe, die sich mit ihr in der Zusammensetzung von Theilen vernichtet, abgeleitet, und weiterhin mehrere Male als Theil gesetzt worden ist, so muß man zuerst aus dem Grundfactor, a, eine andere Zahl ableiten, die sich mit ihm in der Zusammensetzung von Factoren vernichtet, $\frac{1}{a}$,

um sie eben so viele Male als Factor zu setzen, woraus $\left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m} = a^{-m}$ entsteht.

δ. Ist der Exponent der Potenz, $a^{-\frac{m}{n}}$, ein negativer echter Bruch, welcher also aus der Einheit entspringt, indem man das sich mit ihr als Theil Vernichtende (— 1) sucht, es in n gleiche Theile zerlegt, und einen davon m mal als Theil setzt, so wird man das sich mit dem Grundfactor a als Factor Vernichtende $\frac{1}{a}$ zu suchen, es in n gleiche Factoren zu zerlegen, und einen davon, $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)}$, selbst wieder m mal als Factor zu setzen haben. So wird $a^{-\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)}\right)^m$.

ε. Selbst für den Fall, wo der Exponent der Potenz, a^0, als 0 erscheint, erhält sie eine feste Bedeutung. Soll 0 eine Zahl seyn, d. h. aus der Einheit durch Setzen und Verknüpfen von Theilen entstehn, so muß man die Einheit selbst (+ 1), und das sich mit ihr als Theil Vernichtende (— 1), durch Addition verknüpfen. Man wird also hier den Grundfactor a, und das sich mit ihm als Factor Vernichtende, $\frac{1}{a}$, durch Multiplication verbinden müssen, folglich $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = a^0$ erhalten.

B. Grundregeln der Potenzenrechnung.

Nachdem sich die Form der Potenzen so erweitert hat, daß alle Arten der Zahlen als Exponenten dabey eingeführt werden können, ist auch die Möglichkeit gegeben, allgemeine Regeln für arithmetische Operationen zu entwickeln, welche an und mit solchen Andeutungen von Potenzen, ohne Angabe ihres würklich berechneten Werths durch eine Zahl im strengen Sinne, vollzogen werden sollen. Im Nachfolgenden wird unter dem Worte Potenz immer nur die Andeutung, nicht aber die individuelle Zahl selbst, wodurch sich dieselbe realisiren läßt, verstanden, und vorausgesetzt, daß eine solche Zahl bestimmt und unzweydeutig als Werth für sie, existire.

Wenn die arithmetischen Operationen darin bestehen, daß irgend eine Potenz mit einer andern ihr gleichnamigen (d. h. aus demselben Grundfactor gebildeten) durch Multiplicationen oder Divisionen zu verknüpfen, oder ferneren Potenziirungen und Wurzelausziehungen zu unterwerfen ist, so läßt sich das Resultat allemal durch eine Potenz des gleichen Grundfactors darstellen.

Was zuerst die Multiplication gleichnamiger Potenzen betrifft, so ruht ihre Regel auf folgenden Betrachtungen:

α. Für den einfachsten Fall, wo die Exponenten der gegebenen, zur Multiplication bestimmten Potenzen, positive ganze Zahlen sind, kann bey der verlangten Operation überhaupt nichts weiter geleistet werden, als ein Zusammenzählen der Factorenmengen, welche im

Multiplicand und Multiplicator liegen, um die Factorenmenge des Products herauszubringen. So muß der Exponent im Product, die Summe von den Exponenten in den Factoren, z. B. $a^4 . a^6 = a^{10}$; allgemein, wenn m und n ganze Zahlen, $a^m . n^n = a^{m+n}$, seyn.

β. Für den Fall, wo die Exponenten positive Brüche sind, also die vorliegenden Potenzen als Andeutungen von Radicalgrößen angesehn werden können, gilt die nemliche Vorschrift aus gleichem Grunde.

$$a^{\frac{m}{r}} . a^{\frac{n}{s}} = a^{\frac{m}{r}+\frac{n}{s}} = a^{\frac{ms+nr}{rs}}.$$

Denn man bringe, wie es gestattet ist, die Brüche, welche zu Exponenten dienen, auf gleiche Nenner $a^{\frac{ms}{rs}}$ und $a^{\frac{nr}{rs}}$; alsdann lassen sich die Ausdrücke als Potenzen derselben, in ihnen gemeinschaftlich enthaltenen, Radicalgröße, $\sqrt[rs]{a}$, deren Exponenten ganze positive Zahlen sind $(\sqrt[rs]{a})^{ms}$, $(\sqrt[rs]{a})^{nr}$ betrachten; man wird also ihr Product erhalten, wenn man eine Potenz des nemlichen Grundfactors $\sqrt[rs]{a}$ bildet, deren Exponent die Summe jener ganzen und positiven Zahlen ist: $(\sqrt[rs]{a})^{ms+nr}$.

Drückt man diese Radicalgröße wieder als Potenz mit gebrochenem Exponenten aus, $a^{\frac{ms+nr}{rs}}$, so zeigt sich ihr Exponent als Summe der Exponenten, die den zu multiplicirenden Potenzen angehören.

$$\frac{ms+nr}{rs} = \frac{m}{r} + \frac{n}{s}.$$

γ. Vertauscht man die Kunstsprache der Multiplication mit der für die Division, so ergibt sich für den Fall, wo der Exponent des Dividend größer als der des Divisor ist, beyde als positive Zahlen gedacht, von selbst, daß $a^m : a^n = a^{m-n}$ sey. Auch für den umgekehrten Fall ist die Gültigkeit derselben Regel leicht abzuleiten. Sey $n = m + p$, so wird

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p}.$$

Aber jene Regel würde $a^{m-n} = a^{m-(m+p)} = a^{-p}$ geben, welches mit $\frac{1}{a^p}$ gleichbedeutend ist, und also $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ gibt.

δ. Durch den letzten Satz läßt sich die Multiplicationsregel, auch wenn dabey Potenzen mit negativen Exponenten erscheinen, als gültig nachweisen. Denn ist nur bey dem einen Factor der Exponent negativ, so ergibt:

$$a^p \cdot a^{-q} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = a^{p+(-q)}.$$

Ist er es bey beyden, so bringt:

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)}$$
$$= a^{(-p)+(-q)}.$$

Es gilt also, die Exponenten mögen positiv oder negativ, ganz oder gebrochen seyn, die Regel:

I. Multiplication zweyer gleichnamigen Potenzen erzeugt eine eben solche, deren Exponent die Summe

von den Exponenten der sich multiplicirenden Potenzen ist. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Bey dieser unbedingten Allgemeinheit der Multiplicationsregel bedarf die, Division betreffende, durch bloße Vertauschung der Kunstwörter entstehende Vorschrift, keiner weiteren Ableitung; man erhält sofort für die Division als Regel:

II. Division einer Potenz durch eine andere gleichnamige erzeugt eine eben solche, deren Exponent die Differenz zwischen dem des Dividend und dem des Divisor ist. $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Was ferner eine neue Potenziirung an einer schon unter der Form einer Potenz erscheinenden Zahl betrifft, so erhellet sogleich, daß eine solche, wenn der Exponent der schon vorhandenen Potenz eine positive ganze Zahl ist, durch Multiplication dieses Exponenten mit dem Grade der neu verlangten ausgedrückt werden könne. Daß die Regel richtig bleibt, auch wenn der Exponent der gegebenen Potenz ein Bruch ist, ergibt sich aus der Natur der Radicalgrößen:

$$\text{Da } a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, \text{ also } (a^{\frac{m}{n}})^p = \left((\sqrt[n]{a})^m\right)^p$$

$$= (\sqrt[n]{a})^{mp} = a^{\frac{mp}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot p} \text{ ist.}$$

Gilt aber die Regel für alle Potenzen mit positiven Exponenten, so erstreckt sie sich sofort auch auf alle, die negative Exponenten führen. Denn da $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, so wird

$$(a^{-r})^p = \left(\frac{1}{a^r}\right)^p = \frac{1}{a^{rp}} = a^{-rp} = a^{(-r) \cdot p}$$

Man erhält also allgemein die Regel:

III. Potenziirung jeder Potenz eines beliebigen Grundfactors erzeugt eine gleichnamige, deren Exponent ein Product aus dem Exponenten jener anfänglichen Potenz, und dem Grade der an ihr nun zu vollziehenden Potenziirung ist. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Daraus ergibt sich durch bloße Umkehrung der Beziehungen für Wurzelausziehungen aus Potenzen die Regel:

IV. Wurzelausziehung jedes beliebigen Grades aus einer Potenz erzeugt eine gleichnamige, deren Exponent sich findet, wenn man den der gegebenen Potenz durch den Grad der auszuziehenden Wurzel dividirt.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Fünftes Capitel.

Exponentiation. Logarithmensystem und Rechnung. Zusammenhang von Potenzen- oder Logarithmen-Systemen.

A. Aufgabe der Exponentiation.

Die allgemeinen Regeln für das Rechnen mit gleichnamigen Potenzen zeigen erst alsdann ihren vollen Werth und ihre Brauchbarkeit, wenn man sich denkt, daß mit ursprünglichen Zahlen gerechnet werden soll, daß aber alle diese ursprünglichen Zahlen sich in Potenzen des nemlichen Grundfactors nicht allein umsetzen lassen, sondern für jede von ihnen die Andeutung, welche Potenz dieses Grundfactors sie sey, bereits fertig vorliegt.

Die Möglichkeit dieses zu leisten, ruht auf der Lösung des Problems der Exponentiation, welches jede beliebig gewählte Zahl als Potenz eines angenommenen Grundfactors zu betrachten und den Exponenten dieser Potenz ausfindig machen lehren soll.

Hier kommt es denn in der That auf würkliche Darstellung und Nachweisung der unbedingten Möglichkeit einer Realisirung an. Einer bereits gemachten Bemerkung zu Folge muß man sich aber sowohl bey der Wahl des Grundfactors, als bey der Annahme aller übrigen Zahlen, welche als Potenzen desselben betrachtet werden sollen, lediglich auf positive Zahlen beschränken, wenn Andeutungen von Potenzen beliebiger Exponenten eine reelle und einförmige Bedeutung, und die dieses voraussetzenden Regeln der Potenzenrechnung absolute Gültigkeit haben sollen.

Die Lösung der modificirten Aufgabe: eine positive Zahl als Potenz einer anderen gleichfalls positiven anzusehen, und den Exponenten dieser Potenz zu finden, kann zwar vollständig erst nach weiterer Ausführung der allgemeinen Theorie für Potenziirung und Wurzelausziehung gegeben werden, läßt sich indessen, zur Noth genügend, aus den im Vorhergehenden entwickelten Anfängen und Grundzügen dieser Theorie ableiten, und auf elementarische Rechnungsregeln zurückbringen.

1. Jede Zahl B kann zwischen zwey namhaften Potenzen eines beliebigen Grundfactors a eingeschlossen werden, so daß die eine $a^n = A$ weniger, die andere $a^r = C$ mehr als sie beträgt.

Denn a^n kann durch Aenderung des Exponenten klein und so groß werden, als man will.

2. Hat man zwey solche Potenzen, deren Werthe eine gegebene Zahl zwischen sich fassen, so kann man aus ihnen eine dritte gleichnamige ableiten, deren Grad zwischen die Grade jener beyden genau in die Mitte tritt, und deren berechneter Werth, zwischen die ihrigen fallend, sich aus diesen finden läßt.

Wenn man das Product der beyden gegebenen, $a^m = A$ und $a^r = C$, berechnet und daraus die Wurzel des zweyten Grades zieht, so erhält man:

$$a^{\frac{r+m}{2}} = \sqrt{(A\,C)}.$$

Offenbar ist

$$\frac{r+m}{2} - m = \frac{r-m}{2} \text{ und}$$

$$r - \left(\frac{r+m}{2}\right) = \frac{r-m}{2},$$

also der neue Grad $\frac{r+m}{2}$ gleichviel von den beyden anfänglichen, r und m, verschieden.

Da ferner A als kleinere, C als größere Zahl angenommen, also $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$ ein echter, $\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}$ ein unechter Bruch ist, so muß, weil $\sqrt{(A\,C)} \cdot \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} = C$, das $\sqrt{(A\,C)}$ kleiner als C; weil hingegen $\sqrt{(A\,C)} \cdot \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} = A$, das $\sqrt{(A\,C)}$ größer als A seyn.

3. Man kann jedesmal statt der einen von den beyden Potenzen, $a^m = A$ und $a^r = C$, die eine gege-

bene Zahl B zwischen sich fassen, in sofern es nur auf Einschließung zwischen Grenzen ankommt, ihre Mittelpotenz, $a^{\frac{m+r}{2}} = \sqrt{(AC)}$ substituiren, sobald nicht $B = \sqrt{(AC)}$, welches alle weitere Untersuchung überflüssig macht. Die Grade der beyden Potenzen, deren berechnete Werthe die gegebene Zahl einschließen, sind alsdann nur halb so viel verschieden als vorher.

4. Man kann für jede Zahl zwey Potenzen eines willkührlich gewählten Grundfactors angeben, deren berechnete Werthe diese Zahl zwischen sich fassen, und deren Grade um weniger als eine beliebige bestimmte Kleinheit von einander verschieden sind.

Der Act des Einschaltens einer Mittelpotenz zwischen die beyden, deren berechnete Werthe die gegebene Zahl begrenzen, und des Substituirens der genannten Mittelpotenz für die eine der beyden anfänglichen, läßt sich so oft wiederholen, als man will. Bey jedem neuen Schritte solcher Art wird die Differenz zwischen den Graden der beyden begrenzenden Potenzen halb so groß, als sie vorher war, sie kann also, weil fortgesetztes Halbiren eine Größe immer unter jede bestimmte Kleinheit herabzusetzen vermag, auf diesem Wege unter jede beliebige Kleinheitsgrenze herabgedrückt werden.

5. Wenn der Unterschied zwischen den Graden zweyer gleichnamigen Potenzen unter jede bestimmte Kleinheit sinken kann, so läßt sich auch die Differenz ihrer berechneten Werthe unter jede Kleinheitsgrenze hinabtreiben. Sey die eine $a^p = P$, die andere $a^{p+d} = Q = a^p \cdot a^d = P \cdot a^d$, und gestattet d zu beliebiger Kleinheit,

mithin den Nenner n des Bruchs $\frac{m}{n}$, der d darstellt, zu beliebiger Größe zu bringen, während der Zähler m über einen bestimmten Betrag nicht hinausgeht, und wenn man will, stets 1 seyn kann. Daß

$$a^d = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)}$$

mit steigendem n der Einheit so nahe rücken kann, als man will, ist bekannt aus der Natur der Wurzelausziehung.

Ist dieses der Fall, so wird auch P . a^d, das heißt Q, so wenig als man verlangt, von P verschieden werden können.

Es wird also auf diesem Wege nur einer, sich fortlaufend wiederholenden, Operation, die jedesmal auf Multiplication zweyer Zahlen und Ausziehung der Quadratwurzel aus ihrem Producte ankommt, bedürfen, um für jede Zahl zwey Potenzen des beliebig gewählten Grundfactors zu finden, deren berechnete Werthe so wenig differiren, daß man sie bey einer Näherung, welche sich nicht unter eine gewisse Kleinheit hinab zu erstrecken hat, jener angenommenen Zahl gleich setzen, und also diese als Potenz des beliebigen Grundfactors darstellen kann. Dadurch ist also die Aufgabe der Exponentiation erledigt.

B. Logarithmisches System und Logarithmenrechnung.

Gestützt auf die durch obige Regeln begründete Möglichkeit der Exponentiation, muß man, wenn von ernsthaftem Gebrauch der Potenzenformen und allgemein dabey anzuwendender Methode die Rede seyn soll, ein

vollständiges Potenzensystem als zu Stande gebracht voraussetzen, in welchem jede Zahl, innerhalb bestimmter Grenzen der Größe sowohl als der Näherung, in der Gestalt einer Potenz des angenommenen Grundfactors, unter Angabe des dieser Potenz zukommenden Exponenten, aufgestellt worden ist, umgekehrt also auch alle Exponenten, in Verbindung mit den berechneten Werthen der zugehörigen Potenzen vorkommen. Dabey aber hat sich eine andere Kunstsprache, als die bisher angeführte, eingefunden. Man nennt den Grundfactor der Potenzen die Basis, belegt die Exponenten mit dem Namen Logarithmen, und braucht statt des Ausdrucks: berechneter Werth der Potenz eines gewissen Exponenten, den Ausdruck: Zahl, die einem gewissen Logarithmen zugehört. Das fertige Potenzensystem heißt Logarithmensystem und stellt sich in logarithmischen Tafeln dar, in denen zu jedem Logarithmen die zugehörige Zahl; für jede Zahl der Logarithme, dem sie gehört, sogleich anzutreffen seyn muß, sofern practischer Gebrauch beabsichtigt wird.

Man hat sich alsdann zu gewöhnen, die vier Hauptregeln des Rechnens mit gleichnamigen Potenzen, auf folgende Art auszusprechen:

I. Die erste Regel:

Wenn $A = a^m$ und $B = a^r$, so ist $A . B = a^{m+r}$, heißt in der neuen Terminologie:

Um zwey Zahlen, A und B, zu multipliciren, suche man ihre Logarithmen, m und r, in den Tafeln auf, addire sie zusammen, $m + r$; betrachte die Summe als einen gegebenen Logarithmen und nehme rückwärts aus den Tafeln die diesem Logarithmen zugehörige Zahl, A . B. Kürzer: die Logarithmen der

Factoren geben, zusammenaddirt den des Products:

$$\log(A \,.\, B) = \log A + \log B.$$

II. Die zweyte Regel:

Wenn $A = a^m$, $B = a^n$, so ist $\frac{A}{B} = a^{m-n}$, lautet in der neuen Kunstsprache so:

Um eine Zahl, A, durch eine andere, B, zu dividiren, nehme man aus den Tafeln den Logarithmen derselben, m, um von ihm den des Divisor abzuziehen; den Rest, $m - n$, sehe man als einen Logarithmen an, und suche in den Tafeln die Zahl, welche ihm angehört. Sie ist das Gesuchte $\frac{A}{B}$. Kürzer: vom Logarithmen des Dividend den des Divisor abgezogen, ergibt sich der Logarithme des Quotienten:

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B.$$

III. Die dritte Regel:

Wenn $A = a^n$, so ist $A^m = a^{n \cdot m}$, heißt jetzt:

Um eine Zahl, A, zu der Potenz eines beliebigen Grades, m, zu erheben, nehme man aus den Tafeln den Logarithmen dieser Zahl, n, und multiplicire ihn mit dem Grade der verlangten Potenz. Wenn man dieses Product als einen Logarithmen ansieht, und aus den Tafeln die Zahl hervorsucht, der er angehört, so hat man das Gesuchte A^n. Kürzer: der Logarithme einer Potenz ergibt sich, wenn man den Logarithmen des Grundfactors mit ihrem Grade multiplicirt.

$$\log(A^n) = (\log A) \,.\, n.$$

IV. Die vierte Regel:

Wenn $A = a^n$, so ist $\sqrt[m]{A} = a^{\frac{n}{m}}$, drückt sich in der neuen Kunstsprache so aus:

Um aus einer Zahl, A, die Wurzel irgend eines Grades zu ziehn, suche man aus den Tafeln ihren Logarithmen, n, dividire ihn durch den Grad der auszuziehenden Wurzel; betrachte diesen Quotienten als einen neuen Logarithmen und nehme aus den Tafeln die Zahl, welche ihm angehört. Sie ist das Gesuchte $\sqrt[m]{A}$.

Kürzer: der Logarithme der aus einer Zahl zu ziehenden Wurzel, beliebigen Grades, wird erhalten, wenn man den Logarithmen dieser Zahl durch den Grad der aus ihr zu ziehenden Wurzel dividirt.

$$\log \sqrt[n]{(A)} = \frac{\log A}{n}.$$

C. Zusammenhang verschiedener Potenzensysteme unter einander.

Sobald nur ein Potenzensystem vorhanden ist, mithin jede Zahl als Potenz eines gewissen Grundfactors betrachtet werden kann, ergibt sich die Möglichkeit, eine Zahl als Potenz irgend eines andern Grundfactors anzusehen, und deren Exponenten zu finden, sogleich, indem diese Aufgabe darauf ankommt, von zwey gleichnamigen Potenzen die eine als durch Potenziirung der andern entstanden nachzuweisen.

Sey a der Grundfactor des gegebenen Systems, b ein davon beliebig verschiedener, für den noch kein System existirt, c eine Zahl, die als Potenz des letzteren betrachtet, also $= b^x$ gedacht werden soll. Es ist

zugestanden, daß man also $b = a^{\beta}$, $c = a^{\gamma}$ kennt. Will man folglich $b^x = c$ setzen, so wird $(a^{\beta})^x = a^{\gamma}$, also $a^{\beta x} = a^{\gamma}$, mithin $\beta x = \gamma$ und daher $x = \frac{\beta}{\gamma}$ seyn.

Kürzer und in der hier üblichen Kunstsprache: Hat man ein fertiges Logarithmensystem, so kann man aus diesem, wenn $b^x = c$ seyn soll, nach der dritten Fundamentalregel, $\log(b^x) = x \cdot \log b = \log c$ setzen, erhält also

$$x = \frac{\log b}{\log c}.$$

Man darf diese Regel als allgemeine Lösung der Aufgabe der Exponentiation, unter der Voraussetzung, daß ein einziges Potenzensystem bereits berechnet sey, betrachten. Sie läßt sich auf folgende Art ausdrücken: Wenn für irgend ein System die Logarithmen gewisser Zahlen vorhanden sind, so braucht man nur diese Logarithmen durch den Logarithmen der beliebig gewählten Zahl, welche Basis eines neu zu bildenden Systems werden soll, zu dividiren, um für jenes neue System die den nemlichen Zahlen zugehörigen Logarithmen zu erhalten.

D. Bemerkungen über den practischen Gebrauch des gewöhnlichen Logarithmensystems.

Man hat aus guten Gründen für gewöhnliche Rechnungen das System am zweckmäßigsten gefunden, dessen Basis oder Grundzahl 10 ist und Tafeln zu Stande gebracht, in denen für alle decadisch gebildeten Zahlen innerhalb bestimmter Grenzen, die nach dem Umfange

der Tafeln selbst bald weiter bald enger sind, die Logarithmen sofort gefunden werden können.

1. Logarithmen decadisch gebildeter Zahlen.

Uebersteigt die Menge von Zifern, welche eine decadisch gebildete Zahl nach der höchsten bedeutenden enthält, die Grenzen der Tafeln nicht, so ergeben die Tafeln in Folge einer concentrirten Zusammenstellung, deren Einrichtung eine besondere Beschreibung erfordert, sofort den ihr zugehörigen Logarithmen, oder eigentlich nur den Theil desselben, welcher in einem, in der Stelle der Zehntheile anhebenden, echten Decimalbruche besteht, und die Mantisse des Logarithmen genannt zu werden pflegt. Den zweyten, zur Vervollständigung des Logarithmen unentbehrlichen Theil, die jedesmal nöthige Menge ganzer Einheiten enthaltend, die sogenannte Characteristik des Logarithmen, welche immer mit dem Range, den die höchste Zifer der Zahl selbst besitzt, einerley ist, enthalten in der Regel die Tafeln nicht, weil er auf den ersten Blick in jedem einzelnen Falle bestimmt und hinzugefügt werden kann. Die Characteristik eines Logarithmen kann also positiv oder negativ seyn, je nachdem die oberste bedeutende Zifer der zugehörigen Zahl höheren oder niedrigeren Rang als den der Einer besitzt. Die Mantisse ist aber jederzeit, bey allen ursprünglichen Logarithmen, positiv. Man pflegt die positive Characteristik, durch das Comma gesondert, der Mantisse voranzustellen, die negative aber mit vorgesetztem — Zeichen, auf die Mantisse folgen zu lassen. Umgekehrt also, wenn aus den Tafeln zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige

Zahl gefunden werden soll, geht man bloß mit der Mantisse desselben in die Logarithmencolumne, um sie dort aufzusuchen, und zieht alsdann aus den Tafeln die darin als die jener Mantisse zugehörig aufgeführte Zahl hervor. Hierauf erwägt man die Characteristik des gegebenen Logarithmen, und stellt in jener Zahl das Comma so, daß in der That ihre höchste Zifer den Rang erhält, den diese Characteristik bezeichnet.

Die höheren Einheiten des decadischen Systems sind die einzigen Zahlen, deren Logarithmen bloß in einer Characteristik, ohne Mantisse bestehn, und die vollendet genaue Potenzen des Grundfactors abgeben. Alle übrigen Zahlen sind nur genäherte Werthe der Potenzen, welche die ihnen zugesellten Logarithmen als Exponenten erhalten, und werden unsicher, so wie man noch unter ihre letzte Zifer hinabgeht.

2. Logarithmen von Brüchen, die nicht Decimalbrüche sind.

Da Brüche mit Quotienten gleichgeltend sind, so erhält man den Logarithmen eines jeden Bruchs, wenn man vom Logarithmen seines Zählers den des Nenners abzieht. Es werden also, wenn man nach dieser Regel verfährt, die Logarithmen echter Brüche als negative Zahlen erscheinen. Umgekehrt folglich, wenn man eine negative Zahl als Logarithmen betrachten, und die ihr als einem solchen zugehörige Zahl suchen, oder aus $10^{-a} = x$ den Werth von x finden wollte, müßte man zuerst aus den Tafeln die Zahl finden, deren Logarithme jene angenommene negative wäre, falls sie das $+$ Zeichen führte, $10^{a} = A$, und ein Bruch, dessen Zähler 1, dessen Nenner die letztgenannte Zahl

ist, würde das Verlangte seyn. Ist $10^{-a} = x$ gesucht, und geben die Tafeln $10^{+a} = A$, so wird

$$\frac{1}{10^{+a}} = 10^{-a} = \frac{1}{A} = x.$$

Am bequemsten ist noch hier die unbedingte Einführung solcher Logarithmen für gegebene Brüche, denen als zugehörige Zahlen, d. h. als Werthe jener Brüche, decadisch gebildete Zahlen correspondiren.

Ist der Logarithme eines unechten Bruchs verlangt, so wird vom Logarithmen seines Zählers, den seines Nenners abgezogen, von selbst ein gewöhnlicher dritter übrig bleiben, und die Tafeln werden die ihm zugehörige Zahl als decadisch gebildete, das heißt jenen Bruch selbst als solche, erscheinen lassen. Wird aber der Logarithme eines echten Bruchs gefordert, so lege man zum Logarithmen des Zählers so viele Einheiten in der Characteristik zu, bis sie um 1 größer wird, als die vom Logarithmen des Nenners; hänge aber, nach geschehener Abziehung, dem Reste jene zugelegte Menge von Einheiten mit dem — Zeichen wieder an. Dann hat man einen gewöhnlichen Logarithmen, und die Tafeln geben die ihm zugehörige Zahl als decadisch geformte.

Man erlaubt sich zuweilen, im Laufe des Rechnens mit Logarithmen, die Characteristik derselben ohne Schaden ihres Werths, aus zwey Theilen zu bilden, einen positiven, welcher vor die Mantisse, und einen negativen, welcher hinter dieselbe gestellt wird. Besonders bey Wurzelausziehungen aus echten Brüchen mittelst der Logarithmen ist dieses höchst zweckmäßig. Sey unter M die Mantisse verstanden, der Logarithme eines Bruchs, woraus die Wurzel des mten Grades gezogen

werden soll, $0,M - n$, gefunden worden, so wird $\frac{0,M - n}{m}$ der Logarithme der gesuchten Wurzel seyn. Läßt sich von selbst $- n$ so durch m dividiren, daß der Quotient eine ganze Zahl wird, so behält das Resultat, $\frac{0,M}{m} - \frac{n}{m}$ die Gestalt eines einfachen Logarithmen, dessen Characteristik $- \frac{n}{m}$ ist. Im gegentheiligen Falle geht diese Gestalt verloren, und würde, um sich wiederherzustellen, weiteres Rechnen erfordern. Alsdann ist es zweckmäßig, wofern a die geringste Zahl ist, welche, der Characteristik n zugelegt, eine Summe $a + n$ gibt, die durch m theilbar ist, dem anfänglichen Logarithmen die Gestalt $a,M - (a + n)$ zu geben, und dann die nöthige Division an ihm zu vollziehn, woraus unfehlbar ein einfacher Logarithme, $\frac{a,M}{m} - \frac{a+n}{m}$, Mantisse voran, negative Characteristik hinter sich führend, entspringen wird.

Kommt es zum würklichen Aufsuchen der einem gegebenen Logarithmen zugehörigen Zahl, so muß man vorher, wofern seine Characteristik in zwey Theile zerrissen ist, diese wieder in einen zusammenziehn.

Sechstes Capitel.

Grundlehren über nähernde Rechnungen.

I. Begriffe von genäherten Zahlen.

α. Bey sehr vielen Größenbestimmungen kommt es auf Zahlen an, die nur dadurch gegeben sind, daß sie einer gewissen Bedingung Genüge leisten sollen, und meistens gelingt es alsdann nicht, die verlangten Zahlen in völliger Schärfe herauszubringen, sondern nur, statt jeder solchen, zwey andere zu finden, zwischen denen, als Grenzen, sie selbst enthalten seyn müßte, sofern sie als möglich vorausgesetzt wird. Sind nun jene Zahlen gefordert worden, damit zum Zweck anderer und fernerer Bestimmungen weiter mit ihnen gerechnet werde, so geht dieses geradezu nicht an, da man sie selbst nicht hat. In Fällen dieser Art beruht die Möglichkeit der beabsichtigten ferneren Bestimmungen auf der Frage: ob nicht aus den Grenzen, zwischen welchen die Zahlen liegen, mit denen eigentlich gerechnet werden sollte, für diejenige Zahl, die das Resultat dieser Rechnung seyn würde, ähnliche Grenzen gefunden werden können, zwischen denen sie selbst enthalten seyn müßte.

Im Allgemeinen hat dies keine Schwierigkeit. Liegt die erste von zwey als möglich gedachten, aber nicht geradezu, sondern nur durch Begrenzung gegebenen Zahlen, zwischen A und $A + \mathfrak{A}$, die andere zwischen B und $B + \mathfrak{B}$, so wird ihre Summe zwischen $A + B$ und $A + B + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$; ihre Differenz zwischen

$A - B - \mathfrak{B}$ und $A + \mathfrak{A} - B$; ihr Product zwischen AB und $AB + A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}$; ihr Quotient zwischen $\frac{A}{B + \mathfrak{B}}$ und $\frac{A + \mathfrak{A}}{B}$ liegen müssen.

Die nähere Untersuchung hängt von der Art ab, wie die Grenzen derjenigen Zahlen gegeben werden, mit denen man rechnen soll.

β. Die abstracte numerische Arithmetik selbst führt, sobald sie über die Grundoperationen mit ganzen Zahlen hinausgeht, oft auf den Fall, daß die Zahlen, mit denen gerechnet werden soll, nur durch Grenzen gegeben werden können, die von der Art sind, daß sie sich so eng als man will zusammenziehn lassen. Sie fordert alsdann, daß auch für das Resultat, welches das Rechnen mit jenen Zahlen, falls man sie selbst hätte, gebracht haben würde, bestimmte Grenzen angegeben, und Regeln aufgestellt werden, nach denen auch diese, so eng als man verlangen mögte, zusammengezogen werden können. Es ist überhaupt Princip der Größenwissenschaft, daß, sobald eine Größe nur durch Einschließen zwischen genau angebliche Grenzen bestimmbar ist, die Erkenntniß derselben erst dann als genügend betrachtet werden darf, wenn Mittel ausfindig gemacht sind, für sie angebliche Grenzen so zu bestimmen, daß der Unterschied derselben unter jede beliebige Kleinheit herabsinken kann.

Da die Zahlen, welche die numerische Arithmetik annimmt, so wie die, welche sie als Resultat ihrer Operationen verlangt, in der Regel der Form nach decadisch gebildete sind, so läßt sich jene Forderung zunächst darauf zurückbringen, daß bey jeder, auf solche

Grenzbestimmung hinauslaufenden, Rechnung die Möglichkeit nachgewiesen werden muß, das Gesuchte zwischen zwey decadisch gebildete, zu jedem beliebig gewählten Range hinabgeführt zu werden fähige Zahlen einzuschließen, die nur in ihren gleichhohen untersten Ziffern eine Verschiedenheit zeigen.

7. Eine Zahl soll möglichst genähert bis in ihre Endziffer heißen, wenn sie als Ausdruck einer gesuchten Größe, selbst zu klein ist, aber, um eine Einheit in dieser Endziffer vermehrt, zu groß wird; unvollkommen genähert, bis in ihre Endziffer, wenn unsere Kenntniß von ihr so weit reicht, daß wir wissen, sie selbst sey zu klein, werde aber durch Zulegen von zwey Einheiten zu jener Endziffer zu groß. Sie kann also, wenn sie als unvollkommen genähert bis in ihre letzte Ziffer erkannt worden ist, sehr wohl bis dahin an sich eine möglichst genäherte seyn.

In der Regel versteht man immer, der obigen Erklärung gemäß, unter einer genäherten Zahl die kleinere der beyden als Grenzen des Gesuchten dienenden.

Verwandlungen gegebener Brüche in Decimalbrüche, Wurzelausziehungen beliebiger Grade, sind offenbar Operationen, deren Resultate nach den gewöhnlichen Regeln immer in möglichst bis in ihre letzte Stelle genäherter, zu jedem verlangten Range hinabgeführter Zahl erhalten werden können.

8. Wenn die letzte Ziffer einer bis in irgend einen Rang entwickelten und bis dahin als unvollkommen genähert bekannten Zahl weniger als 9 ist, so darf die nach ihrer Weglassung übrigbleibende Zahl, für eine

bis in ihre Endzifer möglichst genäherte gelten; einen Ausnahmefall abgerechnet.

Beträgt die letzte Zifer der anfänglichen weniger als 8, so bleibt sie, wenn man ihr zwey Einheiten zulegt, eine einfache Zifer. Wenn die so veränderte Zahl schon zu groß geworden seyn soll, so ist sie es um so mehr, wenn man ihre letzte Zifer wegwirft, und dafür die vorletzte um 1 erhöht. Ist die letzte Zifer 8, so bewirkt der Zusatz von zwey Einheiten, daß sie wegfällt, dagegen die vorletzte Zifer um 1 erhöht wird. In beyden Fällen also gibt die anfängliche Zahl, nach Weglassung ihrer untersten Zifer, zu wenig, aber um eine Einheit in der alsdann bleibenden letzten Stelle vermehrt, zu viel, ist also bis in die ihr dann bleibende Endzifer möglichst genähert.

Nur in dem dritten noch möglichen Falle, wo eine bis in die letzte Zifer unvollkommen genäherte Zahl mit 9 endigt, wo also das Zulegen von zwey Einheiten zu ihr mehr bringt, als wenn man jene 9 wegwerfen, und bloß in der vorletzten Stelle 1 zufügen wollte, ist sie nach Weglassung ihrer letzten Zifer bis in die ihr dann bleibende Endzifer doch nur unvollkommen genähert. Schließt sie mit mehreren, sich stetig folgenden 9, so darf sie sogar, selbst nach Weglassung aller dieser 9, nur für unvollkommen genähert bis in ihre neue Endzifer gelten *).

*) Ist 326,8453 = α eine bis in den Rang ihrer letzten Zifer unvollkommen genäherte Zahl, mithin selbst zu klein, aber als 526,8455 = β zu groß, so ist augenscheinlich 326,845, soweit es reicht, zu klein, da es noch weniger als α, hingegen 326,846 zu groß, da es mehr wie β beträgt. Mithin 326,845 bis in den Rang seiner untersten Zifer

s. Wenn zwey decadische Zahlen, von denen bekannt ist, daß sie den Werth einer gesuchten Größe zwischen sich fassen, bis in die Stelle eines gewissen Ranges von oben herab identisch sind, so stellen sie eben soweit das von ihnen Begrenzte in möglichst genäherter Zahl dar. Denn eine Einheit höherer Ordnung ist mehr als Alles was eine Zahl in niedrigeren enthalten kann.

Wenn in zwey solchen Zahlen die Zifern, welche sich zuerst, bey einer von oben herab angestellten Vergleichung gleichhoher Stelle, als verschiedene zeigen, nur um 1 von einander abweichen, so wird die kleinere jener beyden Zahlen, in dieser Stelle als Endzifer abgebrochen, bis so weit eine unvollkommen genäherte *). Denn die größere in der genannten Stelle um 1 vermehren, und dann die folgenden weglassen, wodurch sie um so mehr zu groß wird, oder die kleinere in derselben Stelle um zwey vermehren und dann in ihr die folgenden weglassen, gibt Einerley. Da aber durch das Erste zu viel entsteht, so ist die kleinere bis in jene Endzifer eine unvollkommen genäherte Zahl.

möglichst genähert. Ist 32,5999 bis in die unterste Stelle unvollkommen genähert, so liegt zwischen ihr und 32,6001 das Gesuchte, welches offenbar eben sowohl 32,5 . . als 32,6 . . seyn könnte.

*) Sind 528746 und 528859 die Grenzen, so liegt zwischen ihnen möglichst genähert, so weit es reicht, 528000; unvollkommen genähert, 5287000.

Ist die erste jener beyden Zahlen, in der vierten Stelle von oben um 1 vermehrt, 528756 zu groß, um 1 daselbst vermindert, 528736 zu klein, so ist sie als 5287 bis in ihre unterste Stelle unvollkommen genähert.

Wird also von einer Zahl nachgewiesen, daß sie in einer gewissen Stelle, über welche sie noch mit folgenden hinausgeht, um eine Einheit vermindert, zu klein, um eine Einheit vermehrt zu groß ausfällt, so darf sie, nach Weglassung dieser und aller folgenden Stellen, so weit sie alsdann noch reicht, als unvollkommen genähert angesehn werden.

ζ. Wenn eine gegebene Zahl zu klein ist, aber durch das Addiren einer andern, mit ihrer höchsten Ziffer zu einem gewissen Range hinaufreichenden, zu groß wird, so darf man die gegebene, nach Wegwerfung ihrer bis in denselben Rang hinaufreichenden Ziffern, sofort als eine unvollkommen genäherte, soweit sie alsdann reicht, betrachten. Denn das Wegzuwerfende sowohl, als jene Zahl, welche, der gegebenen zugelegt, dieselbe zu groß machen würde, beträgt, weil beyde zu demselben Range aufsteigen, weniger als eine Einheit des nächsthöheren Ranges. Statt beyder also zwey Einheiten dieser Ordnung hinzuzufügen, heißt mehr wie vorhin, und also ein Resultat, welches um so mehr zu groß ist, erzeugen *).

II. Die vier Grundoperationen mit genäherten Zahlen.

Es entsteht zuerst, wenn die Zahlen, mit welchen man rechnen soll, bis in einen gewissen Rang möglichst

*) Ist 27,32859 zu klein, wird es aber durch Zulegen von 0,00786 zu groß, so drückt 27,32 das Gesuchte, bis in die zweyte Decimalstelle unvollkommen genähert, unfehlbar aus. Die würkliche Summe 27,33645, welche zu groß

genähert sind, die Frage, in wie weit das aus dem Rechnen mit ihnen entspringende Resultat selbst als eine genäherte Zahl zu gelten vermöge.

An ihre Beantwortung knüpft sich die noch wichtigere, bis in welchen Rang hinab Zahlen als möglichst genäherte entwickelt werden müssen, damit das Resultat irgend einer an oder mit ihnen zu vollziehenden Grundoperation selbst als eine bis in die Stelle eines beliebig gewählten Ranges reichende und bis in ihre Endziffer genäherte Zahl angenommen werden dürfe.

1. Für die Addition ist Folgendes zu bemerken.

a. Wenn mehrere Zahlen, deren Menge n heißt, und deren jede bis in die Stelle des rten Ranges möglichst genähert ist, durch Addition vereinigt werden sollen, so ist die Summe zu klein, wird aber zu groß, wenn man jede der gegebenen Zahlen in der letzten Stelle um 1, die Summe selbst also in dieser Stelle um n vergrößert.

Ist folglich die Menge der gegebenen Posten dieser Art, n, eine h zifrige Zahl, so gilt die Regel: man addire die gegebenen Zahlen, und lasse die letzten h Ziffern der Summe weg; das Bleibende ist, soweit es reicht, eine unvollkommen genäherte Zahl.

Man kann beyde Summen, die zu kleine sowohl als die zu große, darstellen und vergleichen, um zu entscheiden, ob nicht das nach dieser Regel Gefundene bis an seine Endziffer möglichst genähert sey, welches in der That oft eintreten wird.

seyn soll, mit der anfänglichen Zahl verglichen, gibt augenscheinlich dasselbe Resultat.

Wenn außer den zu summirenden genäherten Zahlen noch andere streng richtige in die Summe treten sollen, so haben diese auf die Anwendung obiger Regel keinen Einfluß.

β. Wenn die Menge der näherungsweise zu entwikkelnden Zahlen, welche zusammenaddirt werden, = n, und dieses n selbst eine h zifrige Zahl ist; wenn ihre Summe eine bis in die Stelle des uten Ranges unvollkommen genäherte Zahl seyn soll, so entwickle man jede der zu summirenden Zahlen möglichst genähert bis in die Stelle des (u + h)ten Ranges, und lasse von der Summe die letzten h Zifern fallen.

Behält man diese Zifern in der Summe, und legt man der untersten noch n Einheiten hinzu, so hat man zu viel, und kann, dieses mit der ersten Summe, die zu wenig bringt, vergleichend, meistens für den jedesmal vorliegenden Fall, ob die nach der Regel gefundene bis in ihre Endzifer unvollkommen genäherte Zahl eine bis dahin möglichst genäherte sey, zur Entscheidung bringen *).

*) Ueber h = 2 wird in würklicher Anwendung kaum eine Rechnung hinausgehn. Ist die Zahl der Posten unter 10, so hat man jeden um eine Stelle; ist sie nicht unter 10, aber geringer als 100, so hat man jeden um zwey Stellen tiefer hinab zu entwickeln, als die Summe geführt werden soll, und diese Summe wird im ersten Falle nach Weglassung der letzten, im zweyten nach Weglassung der beyden letzten Stellen, soweit sie dann reicht, unvollkommen genähert seyn.

Man will z. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$ auf die siebente Decimalstelle unvollkommen genähert erhalten. Hier ist n = 4, h = 1, u = 7. Man entwickle also die Posten auf 8 Decimalstellen.

Uebrigens braucht es kaum bemerkt zu werden, daß alle zu addirenden Zahlen, bis zu einer Stelle des gleichen Ranges hinab entwickelt seyn müssen, und daß, sobald nur eine derselben in einer höheren Stelle als die anderen abgebrochen wäre (weil alsdann schon in dieser Stelle das Resultat der Addition unsicher würde), die Ziffern der Summe in den nächstfolgenden Stellen vergeblich berechnet seyn würden, wenn man die Summe als unvollkommen bis in ihre letzte Stelle genähert erhalten will.

2. Die Subtraction bedarf nur des Nachstehenden.

Wenn Minuend und Subtrahend beyde bis in die Stelle des nemlichen Ranges als möglichst genäherte Zahlen hinabreichen, so bleibt es ungewiß, ob ihre Differenz zu klein oder zu groß ausfällt, aber diese Differenz ist, nachdem sie um eine Einheit vermindert worden, unfehlbar eine, soweit sie hinabreicht, unvollkommen genäherte Zahl.

Denn wofern der Minuend bliebe, der Subtrahend in seiner letzten Stelle um 1 vermehrt würde, müßte

$$\begin{aligned} 1/2 &= 0{,}5 \\ 1/6 &= 0{,}16666666 \\ 1/24 &= 0{,}04166666 \\ 1/120 &= 0{,}00833333 \\ 1/720 &= \underline{0{,}00138888} \\ \text{Summe} &= 0{,}71805553. \end{aligned}$$

Sie ist als 0,7180555 unfehlbar bis in die letzte Ziffer unvollkommen genähert. Man darf hinzufügen, daß sie bis eben dahin möglichst genähert sey, da sie, wenn man ihrer achten Stelle vier Einheiten zulegt, zu groß wird.

Die wahre Summe ist $517/72 = 0{,}71805555\ldots$



das Resultat (alsdann um 1 in der letzten Stelle geringer als der anfängliche Rest) zu klein ausfallen. Wenn aber, bey ungeändertem Subtrahend, der Minuend in seiner untersten Stelle um 1 vergrößert würde, so müßte das Resultat (um 1 größer in seiner letzten Stelle als der anfängliche Rest) zu viel betragen. Das erste Resultat stellt folglich, weil es in seiner letzten Stelle um eine Einheit verringert, selbst zu klein, aber durch Zulegen von zwey Einheiten zu groß wird, eine bis in seine Endzifer unvollkommen genäherte Zahl dar *).

Um also die Differenz zweyer Zahlen bis in einen bestimmten Rang unvollkommen genähert zu erhalten, muß man diese Zahlen möglichst genähert bis in denselben Rang hinabführen; ihren Rest durch Subtraction finden; und die niedrigste Zifer desselben um 1 verringern.

3. Für die Multiplication sind folgende Betrachtungen nöthig.

α. Wenn die beyden Factoren eines Products, A und B, zu klein sind, aber der erste durch den Zusatz 𝔄, der andere durch den Zusatz 𝔅 zu groß wird, so liegt das Product zwischen den Grenzen AB und AB + A𝔅 + B𝔄 + 𝔄𝔅. Ist sein einer Factor B genau richtig, so liegt es zwischen AB und AB + 𝔄B.

*) Wäre der Minuend $\frac{5}{9}$ = 0,5555, der Subtrahend $\frac{3}{7}$ = 0,4285, so würde der Rest 0,1270, es bliebe ungewiß, ob diese Zahl zu klein oder zu groß ist, aber 0,1269 als unvollkommen genäherten Werth des Gesuchten, soweit es reicht, zu setzen, würde man berechtigt seyn. Das Gesuchte ist $\frac{5}{9} - \frac{3}{7} = \frac{8}{63}$ = 0,1269 . . .

Wenn also der Multiplicand A im Range m anhebt und im Range m — p endigt, der Multiplicator B bis zum Range n aufsteigt und bis in den Rang n — q hinabgeht, beyde bis in ihre Endzifern möglichst genähert, so fällt das Product zwischen AB und $AB + A\,1^{n-q} + B\,1^{m-p} + 1^{m+n-p-q}$. Es ist offenbar, daß der erste Zusatz $A\,1^{n-q}$ aus der Unsicherheit des Multiplicator, B, herrührend, höchstens zum Range $m + n - q$; der zweyte, $B\,1^{m-p}$, aus der des Multiplicand, A, entstehend, bis in den Rang $n + m - p$ aufsteigen kann. Ist also jener erste Factor des genannten Products nur bis in die Stelle des Ranges p näherungsweise entwickelt, so wird das Product nothwendig schon in der Stelle des Ranges $m + n - p$ unsicher, wenn auch der andere streng richtig seyn sollte. Will man folglich gewiß seyn, daß keiner der Factoren weiter entwickelt werde, als es die Unsicherheit des anderen bey dem Zwecke, alle ungewissen Zifern des Products wegzulassen, nöthig macht, so muß $p = q$ seyn, oder *beyde Factoren müssen gleichviele Zifern nach ihrer höchsten reellen haben.*

Unter dieser Voraussetzung wird, weil $A\,1^{n-p} + B\,1^{m-p} + 1^{m+n-2p}$, in dem Falle, wo $A\,1^{m} + B\,1^{m}$ über den Rang $m + n$ hinausgeht, kleiner als $2^{m+n-p+1}$ bleibt, das Product AB zu klein, aber als eine jedenfalls bis in den Rang $m + n -$

p + 2, wenn sie darin abgebrochen wird, unvollkommen genäherte Zahl angesehn werden dürfen; in dem Falle, wo $A\,1^n + B\,1^m$ nicht über den Rang m + n steigt, wird AB noch bis in den Rang m + n — p + 1, abgebrochen in ihm, unvollkommen genähert seyn. Hätte man also AB aus seinen Factoren, soweit sie reichen, vollständig berechnet, so würden in diesem Producte, welches selbst bis in den Rang m + n — 2p reicht, im ersten Falle die untersten p + 2, im letzten die untersten p + 1 Ziffern, wegfallen müssen, und dann die bleibende Zahl als unvollkommen genähert bis in ihre Endziffer gelten dürfen.

Daher die folgende Regel. Will man das Product der näherungsfähigen Zahlen, A, die im mten Range, und B, die im nten Range anhebt, bis in die Stelle des Ranges u als Endziffer unvollkommen genähert erhalten, so entwickle man, wenn $A\,1^n + B\,1^m$ den Rang m + n übersteigt, möglichst genähert, A bis in die Stelle des Ranges u — n — 2, B bis in die des Ranges u — m — 2; wenn $A\,1^n + B\,1^m$ den Rang m + n nicht übersteigt, A bis in den Rang u — n — 1; B bis in den Rang u — m — 1, und lasse alle Stellen nach der des Ranges u in dem Producte weg *). Es ist klar, daß auch dieser Regel gemäß

*) Will man AB = $^{34}/_3 \,.\, ^5/_{11}$ bis in die Stelle des Ranges — 6 unvollkommen genähert erhalten, so muß, da hier m = 1, n = — 1, u = 6 ist, und $A\,1^n + B\,1^m$ vom Range m + n bleibt, A bis in den Rang u — n

beyde Factoren gleichviele Ziffern nach der höchsten reellen erhalten.

Bey der Ausübung dringt sich bald die Frage auf: ob nicht bey der Berechnung solcher Producte, in sofern aus ihnen, nachdem sie fertig geworden, ein Theil als unbrauchbar weggeworfen werden muß, eine Abkürzung möglich sey, die es gestattete, die Berechnung des Wegzuwerfenden ganz zu unterlassen. Dazu führen die folgenden Sätze.

β. Ist der Multiplicand eine noch nicht entwickelte Zahl, der Multiplicator eine bestimmte einfache Zifer, von beliebigem, dem hten, Range, und will man, daß ein Product aus beyden bis in die Stelle eines vorgeschriebenen Ranges, r, hinabreiche, so muß wenigstens der Multiplicand bis in die Stelle des Ranges r — h entwickelt seyn. Denn alsdann wird, wie verlangt, die niedrigste Zifer des Products vom Range r — h + h = r.

Aber das Product wird, unter dieser Voraussetzung, wenn auch der Multiplicand bis in jene Endzifer möglichst genähert ist, keine bis in ihren Rang unvollkommen genäherte Zahl werden, sondern soweit unsicher

— 1 = — 6, B bis in den Rang u — m — 1 = — 8 entwickelt werden.

$^{34}/_{3}$ = 11,333333

$^{5}/_{11}$ = 0,45454545.

Das würklich durch gemeine Multiplication berechnete Product wird:

5,151515 | 08484835.

Das wahre Product $^{34}/_{3}$. $^{5}/_{11}$ = $^{170}/_{33}$ ergibt:

5,15151515 . . . .

bleiben, daß sich nur behaupten läßt, es sey selbst zu klein, und werde alsdann erst zu groß ausfallen, wenn ihm in seiner letzten Stelle die Zifer des Multiplicator, woraus es entstanden, zugelegt worden ist. Ebendeswegen also wird es unfehlbar, nach Weglassung seiner letzten Zifer, bis in die unterste der alsdann bleibenden, unvollkommen genähert seyn (I, ζ.).

Will man also ein solches Product, bis in eine gewisse Stelle als letzte hinab unvollkommen genähert erhalten, so muß der Multiplicand erst in einer Stelle, die um Eins niedriger ist, als diejenige, welche als letzte hinlänglich gewesen wäre, das Product in den geforderten Rang bloß hinabreichen zu machen, bis in dieselbe möglichst genähert, abgebrochen; die Multiplication bis in die tiefste Stelle dieses Multiplicand getrieben; und die unterste Stelle des aus ihr entstehenden Products weggelassen werden. In Zeichen: ist der Multiplicator eine Zifer vom Range k, und soll das Product bis in den Rang r unvollkommen genähert werden, so muß man den Multiplicand bis in den Rang r — k — 1 möglichst genähert entwickeln, das Product, welches bis in den Rang r — 1 hinabgehn wird, berechnen, und dessen unterste Zifer weglassen *).

*) Soll das Product aus $5/7 \,.\, \overset{3}{8}$ bloß bis in die Stelle des Ranges — 5 hinabreichen, so muß 5/7 bis in die des Ranges — 5 — 3 = — 8 entwickelt werden. Dann erhält man $5/7 \,.\, \overset{3}{8} = 0{,}71428571 \,.\, \overset{3}{8} = 5714{,}28568$. Dies Product ist zu klein, man kann aber aus den vorliegenden Daten nichts weiter folgern, als daß es zu groß werden muß, wenn man ihm in seiner letzten Zifer 8 zulegt, wodurch es 5714,28674 wird. Hätte man den Mul-

γ. Ist folglich der Multiplicand, anhebend mit $\overset{m}{a}$, der Multiplicator mit $\overset{n}{b}$ gegeben, und enthalten beyde, folgend auf ihren höchsten reellen Ziffern, gleiche Ziffernmengen, so daß, wenn der erste bis in die Stelle des Ranges r — n hinab möglichst genähert ist, das Gleiche bey dem zweyten, bis in die Stelle des Ranges r — m Statt hat, so kann man unter dieser Voraussetzung jede Schicht von Producten, die aus den einzelnen Ziffern des Multiplicator entsteht, indem man mit denselben am ganzen Multiplicand operirt, bis in die Stelle des rten Ranges herabführen, und in ihr abbrechen lassen.

tiplicand eine Stelle tiefer hinab entwickelt, 0,714285714, alsdann mit $\overset{3}{8}$ multiplicirt, und die letzte Ziffer des Products weggeworfen, so würde das Bleibende, 5714,28571, soweit es reicht, eine unvollkommen genäherte Zahl seyn. Das wahre Product ist $^{40000}/_{7}$ = 5714,285714 . . . Hier ist also, wie oft, der Fall vorhanden, wo man von dem Resultat aus allgemeinen Gründen nur behaupten darf, es sey bis in eine gewisse Stelle unvollkommen genähert, und wo dasselbe in der That bis in diese Stelle möglichst genähert ist.

Man gewöhnt sich leicht bey Multiplicationen, wo der erste Factor vielziffrig, der andere einziffrig ist, mit dem letzten von oben herab an dem ersten zu operiren, und zu jedem dabey entspringenden Partialproducte sogleich zu übertragen, was aus dem nächstniedrigeren, also später an die Reihe kommenden, in dasselbe übergehen muß. Diese Form des Multiplicirens gewährt bey Näherungsrechnungen große Bequemlichkeit, besonders wenn man bey einem vielziffrigen Multiplicator die successiven Ziffern desselben gleichfalls von oben herab in Thätigkeit setzt.

Alsdann wird bloß die erste dieser Schichten keine unvollkommen bis dahin genäherte Zahl werden können, und man sich in Beziehung auf sie begnügen müssen, zu wissen, daß sie zu klein ist, aber durch Zulegen der sie erzeugenden multiplicirenden Zifer zu groß wird. Alle übrigen Schichten aber werden sich so in die Stelle des rten Ranges herunterführen lassen, daß sie, abgebrochen in ihr, bis dahin unvollkommen genähert sind *).

Ein Product, welches auf diese Art aus zwey gleichviele Zifern enthaltenden Factoren der genannten Form berechnet ist, daß man, wenn der Multiplicand mit $\overset{m}{a}$, der Multiplicator mit $\overset{n}{b}$ anhebt, den ersten bis in den Rang $r - n$, den zweyten bis in den Rang $r - m$ möglichst genähert entwickelt; daß man ferner die aus der höchsten Zifer des Multiplicator entspringende erste Productenschicht, soweit es der Multiplicand gestattet, also bis in die Stelle des rten Ran-

*) Es genügt zu diesem Zwecke, wenn man für jede der folgenden Schichten nur soweit im Multiplicand, um würklich an ihm zu operiren, hinabgeht, daß seine jedesmalige letzte Zifer um einen Rang tiefer reicht, als $r - h$, wenn r der Rang ist, zu dem das Productenschicht hinabgeführt werden soll, und h der Rang der multiplicirenden Zifer woraus sie entsteht. Es würde also bey solchen verkürzten Multiplicationen, durchaus von oben herab geschehn, gestattet seyn, sobald die beyden obersten Schichten vollständig berechnet sind, wobey die erste ganz, die zweyte mit Weglassung ihrer letzten Zifer behalten wird, allmälig von unten herauf, so wie eine neue Schicht berechnet werden soll, eine neue Zifer im Multiplicand auszustreichen, und die jedesmalige letzte Zifer des aus dem Bleibenden entstehenden Products wegzulassen.

es, und jede der anderen Schichten bis in die nemliche Stelle des rten Ranges, jedoch bis dahin unvollkommen genähert, hinabführt, und alsdann die Summe aller dieser Schichten berechnet, soll bis in die Stelle des rten Ranges verkürzt, und das Verfahren, wodurch es berechnet wird, verkürzte bis in jene Stelle herabgehende Multiplication genannt werden *).

8. Ist in der That, auf die eben angegebene Art, aus zwey Factoren dieser Form, ein bis in die Stelle des rten Ranges reichendes Product berechnet, so wird

*) Sollte der eine Factor oder beyde, nicht abgebrochen, sondern streng richtig seyn, so leidet die Regel deswegen keine Ausnahme, denn wofern die Ziffernmenge in ihnen nicht so groß ist als die Regel verlangt, darf man die fehlenden Stellen mit 0 ausgefüllt denken.

Wollte man das Product der Zahlen $5/_{11} \cdot 274/_{15}$, nachdem sie decadisch entwickelt worden, verkürzt bis in die 6te Decimalstelle, erhalten, so würde, da $\overset{m}{a} = \overset{-1}{4}$, $\overset{n}{b} = \overset{1}{1}$ ist, $r = -6$ seyn soll, der erste Factor bis in den Rang $r - n = -6 - 1 = -7$, der zweyte bis in den Rang $r - m = -6 (-1) = -5$ zu entwickeln seyn. Es würde mithin die Rechnung so stehn:

```
274/15 = 18,26666
  5/11 =  0,4545454
          ---------
          7,306664
            913333
             73066
              9133
               730
                91
                 7
          ---------
          8,303024.
```

es schon in sofern, als jede der zu ihm vereinigten Productenschichten zu klein ist, selbst zu klein. Addirt man aber, wegen der obersten von diesen Productenschichten, weil sie schlechthin hat abgebrochen werden müssen, die höchste Zifer des Multiplicator, woraus sie entsprungen ist; wegen jeder der übrigen Schichten, weil sie unvollkommen genähert ist, zwey Einheiten, also (da der übrigen Schichten so viele sind, als der Multiplicator nachfolgende Zifern enthält, d. h. $m + n - r$) im Ganzen $a + 2(m + n - r)$, zu dem Producte in seiner letzten Stelle, so wird es zu groß *).

Das so erzeugte Resultat könnte aber, obschon es größer ist als dasjenige, was der Multiplicand, selbst wenn genaue Darstellung desselben möglich wäre, zu geben vermögte, demnach zu klein seyn, in sofern auch der Multiplicator abgebrochen ist. Gibt man jedoch demselben Resultate noch in seiner letzten Stelle den Zusatz, welcher ihm ferner zukommen würde, wenn

*) Die Berechnung der Productenschichten ließe sich auch so einrichten, daß jede nach den beyden obersten, für die es bey dem über sie im Obigen Festgesetzten bleiben muß, soweit hinter der Stelle, in welcher sie abgebrochen werden soll, verfolgt würde, bis sie als eine in diese Stelle möglichst genäherte erkannt werden könnte, und alsbann würde statt $a + 2(m + n - r)$ gesetzt werden dürfen $a + m + n - r + 1$. Aber da man es zuweilen bey einer vorliegenden Zahl unentschieden lassen muß, ob sie bis in eine bestimmte Stelle, nach der noch andere in ihr folgen, unvollkommen oder möglichst genähert ist (I, δ.), so erhielte man auf diese Art kein unbedingt allgemeines Resultat für die Grenzbestimmung, und eines solchen bedarf die fernere Entwicklung.

auch der Multiplicator in seiner untersten Stelle um 1 vermehrt und also zu groß würde, das heißt, diesem Multiplicand, oder noch mehr als der genannte Zusatz betragen kann, die um eine Einheit vermehrte höchste Ziffer des Multiplicand, $(a + 1)$, durch Addition bey, so wird es jedenfalls zu groß.

Zusammengefaßt ergibt diese Betrachtung folgenden Satz.

Hebt der Multiplicand an mit $\overset{m}{a}$, möglichst genähert reichend bis in die Endziffer des Ranges $r - n$, während der Multiplicand mit $\overset{n}{b}$ beginnt, und ebenso in der Stelle des Ranges $r - m$ endigt; und hat man das Product beyder verkürzt bis in die Stelle des rten Ranges berechnet, so ist dieses weniger, als das wahre Product seyn würde, wenn dasselbe in der rten Stelle abbräche. Aber man erhält mehr als das wahre Product, wenn man dem verkürzten in seiner untersten Stelle noch $a + b + 2(m + n - r) + 1 = S$ zulegt.

Ist S eine hziffrige Zahl, so lasse man die letzten h Ziffern des verkürzten Products weg; das Zurückbleibende wird, soweit es reicht, eine unvollkommen genäherte Zahl. Daraus ergibt sich folgende Hauptregel:

a. Ist der Multiplicand eine mit $\overset{m}{a}$, der Multiplicator eine mit $\overset{n}{b}$ anhebende Zahl, beyde in folgende Stellen beliebig entwicklungsfähig; und will man das Product bis in die Stelle des Ranges r unvollkommen genähert erhalten, so bilde man, zu Anfang, unter k eine noch unbekannte ganze Zahl verstehend, die Sum-

me $S = a + b + 2(m + n - u + k) + 1$. Wenn man für k die successiven ganzen Zahlen setzt, so werden einige solcher Substitutionen hinreichen, denjenigen Werth von k zu finden, wofür jene Summe selbst eine kzifrige Zahl wird; dieser Werth heiße h. Nun entwickle man den Multiplicand möglichst genähert bis in die Stelle des Ranges $u - n - h$, den Multiplicator bis in die Stelle des Ranges $u - m - h$; berechne aus beyden ein verkürztes Product, reichend bis in die Stelle des Ranges $u - h$, und lasse dessen letzte h Zifer weg. Das Uebrigbleibende ist die gesuchte, bis in den Rang u unvollkommen genäherte Zahl *).

*) Seltene Fälle abgerechnet, wird h in der Regel $= 2$ seyn. Alsdann entwickelt man gehörig den Multiplicand bis in die Stelle des $(u - n - 2)$ten, den Multiplicator bis in die des $(u - m - 2)$ten, die Schichten der Partialproducte bis in die Stelle des $(u - 2)$ten Ranges, mit Uebertragung dessen in ihre tiefste Stelle, was in dieselbe übergegangen seyn würde, falls man, soweit es der Multiplicand gestattet, die Berechnung von jeder noch eine Stelle tiefer, in dieser unsicher bleibend, hinabgetrieben hätte. Von dem Producte läßt man die beyden untersten Zifern weg, und alsdann ist es die übrigbleibende Zahl, soweit sie reicht, eine unvollkommen genäherte.

Man will z. B. das Product der beyden Brüche $^{326759}/_{3}$ und $^{1266}/_{9}$, nachdem sich dieselben in Decimalbrüche verwandelt haben, soweit berechnen, daß es bis in die dritte Decimalstelle unvollkommen genähert wird. Da der erste Factor, wenn er entwickelt wird, mit $\overset{5}{1}$, der andere mit $\overset{2}{1}$ beginnt, also $a = 1$, $b = 1$, $m = 5$, $n = 2$ ist; $u = -3$ seyn soll; und $S = a + b + 2(n + m - u + k) + 1$, wenn man $k = 2$ setzt, $= 27$, also zweyzifrig wird, mithin $h = 2$ ist, so entwickle man den

Behält man das bis in die Stelle des Ranges n — h berechnete Product, und legt man seiner untersten Stelle S Einheiten zu, so wird es aus einer zu kleinen Zahl in eine zu große verwandelt. Diese Grenzen sind in der Regel hinlänglich zu beurtheilen, wie weit das Gefundene möglichst genähert ist.

ersten Bruch bis in die Stelle des (n — n — 2)ten d. h. des — 7ten, den andern bis in die des (n — m — 2)ten d. h. des — 10ten Ranges, lasse die Schichten der zu berechnenden Productschichten bis in die Stelle des (n — 2)ten d. h. — 5ten Ranges, alle, außer der obersten bis dahin unvollkommen genähert, hinabreichen, und summire sie:

108919, 3333333
140, 6666666666
108919 3333333
43567 7333333
653 5159999
6 5351599
6535159
653515
65351
6534
653
64
6
15321319, 55546 / 5.

Diese Summe ist nach Weglassung ihrer beyden letzten Ziffern, soweit sie reicht, unvollkommen genähert. Behielte man sie ohne jene Weglassung, so würde das Resultat zu groß, sobald noch S = 27 hinzukäme. Also zwischen den Decimalen ,55547 und ,55574 lägen die des wahren Products, so daß für diesesmal, die nach obiger Regel gefundene Zahl selbst, soweit sie reicht, möglichst genähert ist. Die Probe bestätigt dies völlig; das genau berechnete Product beyder Brüche gibt

$413675628/27 = 15321319,5555 \ldots$

Für die Division ist nachstehende Bemerkung über verkürzte Multiplication wichtig.

§. Zu jeder Productenschicht, die ein verkürztes Multipliciren erzeugt, ausgenommen vielleicht die unterste, trägt nicht bloß die höchste Zifer des Multiplicands sondern auch mehrere oder wenigere seiner folgenden Zifern bey. Wäre also a^{m} die höchste Zifer des Multiplicand, β^{k} irgend eine Zifer des Multiplicator, so würde, falls β um 1 wüchse, das Product um mehr als a^{m+k} zunehmen müssen, ausgenommen vielleicht, wenn β^{k} die tiefste Zifer des Multiplicator seyn sollte, in welchem Falle die Zunahme des verkürzten Products bloß a^{m+k} ausmachen könnte.

Rückwärts also ist man berechtigt so zu schließen. Soll eine Zahl, die als verkürztes Product, entstanden aus einem Multiplicand, dessen höchste Zifer a^{m} ist, betrachtet wird, durch Aenderung ihres Multiplicator in der Stelle eines beliebigen Ranges k gewachsen seyn, aber um weniger als a^{k}, so beträgt die Aenderung des Multiplicator weniger als 1^{k-m}. Denn betrüge dieselbe 1^{k-m}, so müßte, selbst im äußersten Falle, das Product schon um $a^{m} . 1^{k-m} = a^{k}$ vergrößert seyn, welches der Annahme widerspricht.

4. Für die Division kommt es auf nächstehende Sätze an.

α. Der allgemeinste Satz für die Division ist: daß, wenn der Dividend als A zu klein, als $A + \mathfrak{A}$ zu groß; der Divisor als B zu klein, als $B + \mathfrak{B}$ zu groß seyn soll; der Quotient zwischen $\frac{A}{B + \mathfrak{B}}$ und $\frac{A + \mathfrak{A}}{B}$ liegen muß.

β. Ist also der Dividend A eine möglichst genäherte Zahl, reichend bis in den Rang p, der Divisor B eine streng richtige; so wird $\frac{A}{B}$ zu klein, $\frac{A}{B} + \frac{\overset{p}{1}}{B}$ zu groß für den wahren Quotienten. Ist die höchste Zifer des Divisor vom Range m, so wird $\frac{\overset{p}{1}}{B}$ kleiner als $\overset{p-m}{1}$.

Um so mehr also ist alsdann $\frac{A}{B} + \overset{p-m}{1}$ zu groß. Mithin der Quotient $\frac{A}{B}$ bis in die Stelle des Ranges p — m unvollkommen genähert, auf jeden Fall also, wenn m positiv, weiter als der Dividend.

γ. Ist der Dividend A genau, der Divisor B möglichst genähert bis in den Rang q, so wird, als Quotient, $\frac{A}{B}$ zu groß; hingegen $\frac{A}{B + \overset{q}{1}}$ zu klein. Aber

$\frac{A}{B} - \frac{A}{B} \cdot \frac{\overset{q}{1}}{B}$ ist noch kleiner als $\frac{A}{B + \overset{q}{1}}$ *).

die höchste Ziffer des Quotienten $\frac{A}{B}$ vom Range n,

höchste des Divisor B vom Range m, so ist q-

größer als $\frac{\overset{q}{1}}{B}$, und $\overset{n+1}{1}$ größer als $\frac{A}{B}$, m

$\overset{q-m+n+1}{1}$ größer als $\frac{A}{B} \cdot \frac{\overset{q}{1}}{B}$. Folglich

$- \overset{q-m+n+1}{1}$ noch kleiner als $\frac{A}{B} - \frac{A}{B}$.

*) Denn $\frac{A}{B} - \frac{A}{B} \cdot \frac{\overset{q}{1}}{B}$ ist $\frac{A}{B}\left(1 - \frac{\overset{q}{1}}{B}\right)$ und $\frac{A}{B+}$

$\frac{A}{B}\left(\frac{1}{1 + \frac{\overset{q}{1}}{B}}\right)$. Da aber $(B - \overset{q}{1}) \cdot (B + \overset{q}{1}) =$

$- \overset{2q}{1} < B \cdot B$, so ist $\frac{B - \overset{q}{1}}{B} < \frac{B}{B + \overset{q}{1}}$.

und Nenner durch B dividirt, wird das Erste $1 -$

das Andere $\frac{1}{1 + \frac{\overset{q}{1}}{B}}$, also ist das Erste kleiner al

Zweyte, woraus sich sogleich der anfängliche Satz erg

Mithin $\frac{A}{B}$ eine unvollkommen bis in den Rang $q - m + n + 1$ genäherte Zahl, wenn es in ihr um 1 verringert, und dann abgebrochen wird.

δ. Sind Dividend und Divisor beyde möglichst genäherte Zahlen, der erste bis in den Rang p, der andere bis in den Rang q, so ist, mit Beybehaltung der vorigen Bezeichnung, $\frac{A}{B} + \frac{\overset{p}{1}}{B}$, noch mehr also $\frac{A}{B} + \overset{p-m}{1}$, zu groß, und $\frac{A}{B + \overset{q}{1}}$, noch mehr also $\frac{A}{B} - \overset{q-m+n+1}{1}$ zu klein. Sollen die Unsicherheiten dieser beyden Grenzbestimmungen sich im Quotienten auf eine Zifer gleiches Ranges erstrecken, so muß $p - m = q - m + n + 1$, also $p = q + n + 1$ seyn, und alsdann wird der Quotient für eine bis in den Rang $q - m + n + 2$ unvollkommen genäherte Zahl auf jeden Fall gelten dürfen. Setzt man $q - m + n + 2 = u$, woraus $q = u + m - n - 2$ und $p = u + m - 2$ folgt, so ergibt sich die folgende Regel.

Ist der Divisor eine Zahl, anhebend im $m$ten Range; wird die höchste Zifer des Quotienten vom Range n; und soll der Quotient bis in den Rang u unvollkommen genähert erhalten werden, so entwickle man möglichst genähert den Dividend bis in die Stelle des Ranges $u + m - 2$; den Divisor bis in die des Ranges $u + m - n - 2$, und vollziehe mit diesen Zahlen, als wenn sie vollendet wären, nach der gemeinen Divisionsregel die Operation. Der Quotient wird

alsdann eine bis in seine letzte, dem Range u angehörige, Stelle, unvollkommen genäherte Zahl seyn, nachdem die Ziffer in dieser letzten Stelle um 1 verringert worden ist *).

Man wird indessen auch hier, wie bey der Multiplication, Abkürzung des mechanischen Rechnens wünschenswerth und möglich finden. Darüber ergeben die folgenden Sätze das Nähere.

s. Das verkürzte Multipliciren zieht unfehlbar, weil jeder Zusammensetzung eine sie wieder aufhebende Trennung entgegensteht, eine umgekehrte Operation, verkürztes Dividiren nach sich, welche sich vom gewöhnlichen Dividiren nur dadurch unterscheidet, daß bey ihr alle Productenschichten, die vom Dividend abgezogen werden, gleich tief hinabgehn, und aus dem hinlänglich entwickelten Divisor durch verkürztes Multi-

*) Das Verfahren ist nach dieser Regel noch unbequem und weitläuftig. Sollte der Bruch $^{1924}/_{9}$, als Decimalbruch dargestellt, durch $^{2}/_{15}$, in gleiche Form gebracht, dividirt werden, so ist hier $m = -1$, $n = 3$. Verlangte man den Quotienten bis in die sechste Decimalstelle unvollkommen genähert, so ist $u = -6$. Man würde also den Dividend bis in den Rang $u - m - 2 = -9$, den Divisor auf $u - m - n = -12$ zu entwickeln haben.

Aus 213,777777777 als Dividend, und 0,133333333333 als Divisor entsteht, auf dem Wege der gemeinen Division, der Quotient 1603,333333. Er ist also, als 1603,33333 unfehlbar bis in seiner Stelle unvollkommen genähert. Der wahre Quotient ist

$$^{1924}/_{9} \cdot {}^{15}/_{2} = {}^{4810}/_{3} = 1603,3333333 \ldots$$

plicirent desselben mit der jedesmal hervortretenden Ziffer des Quotienten abgeleitet werden müssen *) (II, 3, γ.).

ζ. Ist bey einem verkürzten Dividiren aus einem anfangs gegebenen dazu geeigneten Dividend ein Quotient berechnet; läßt man den dabey gebrauchten Divisor, der mit $\overset{m}{a}$ anheben mag, ungeändert, nimmt man aber nachher einen neuen Dividend, größer als der zuerst gegebene, um daran die nemliche Operation zu wiederholen, so kann der neue Quotient größer werden

*) So entsteht, durch verkürztes Dividiren, aus:

dem Divisor	und Dividend:	der Quotient
108919,3333333	1532131955545	140,6666666666
	1089993333333	

442938622222
435677333333

7261288879
6535159999

726128880
653515999

72612[illegible]1
65351599

7261282
6535159

726123
653515

72608
65351

7257
6534

723
653

70
64

6.

als der vorige. Beträgt aber die Aenderung des Dividend weniger als a^{k}, so kann die dadurch möglicher Weise bewürkte Aenderung des Quotienten nicht umhin, geringer als 1^{k-m} zu seyn (3, ζ.).

γ. Man denke sich drey näherungsfähige Ausdrücke, den einen, C, als Product (Dividend), die beyden andern als Factoren desselben; den ersten, A, anhebend mit a^{m}, als Divisor, den zweyten, B, anhebend mit b^{n}, als Quotienten. Hätte man (unter u eine beliebige ganze Zahl, niedriger als $m + n$, unter h eine Zahl verstanden, welche $S = a + b + 2(m + n - u + h) + 1$ selbst hzifrig werden läßt), den ersten Factor, A, bis in die Stelle des $(u - n - h)$ten; den zweyten, B, bis in die Stelle des $(u - m - h)$ten Ranges möglichst genähert entwickelt, so ließe sich aus ihnen, durch verkürztes Multipliciren, ein Product, selbst herabgehend bis in die Stelle des $(u - h)$ten Ranges, berechnen (II, 3, ε.).

Dieses bis in die Stelle des $(u - h)$ten Ranges auf solche Art hinabgeführte Product, würde also, wenn man es soweit hätte, und durch Hülfe seines ersten Factors, des Divisor A, diesen bis in den Rang $u - n - h$ möglichst genähert gedacht, vermöge einer verkürzten, bis in den $(u - h)$ten Rang herabgehenden Division wieder auflöste, den andern Factor, den Quotienten B, bis in den Rang $u - m - h$ richtig wiedergeben. Vollzöge man aber eine eben solche Division an dem wahren Producte, nachdem dieses aus

dem gegebenen, C, unmittelbar, bis in die Stelle des ($u - h$)ten Ranges möglichst genähert, entwickelt worden wäre, so könnte der daraus entspringende Quotient größer als der vorige werden, weil dieses wahre Product, möglichst genähert bis in den Rang $u - h$, größer ist als jenes erstgenannte, nur bis in den Rang $u - h$ herabgeführte. Aber der Unterschied zwischen den bey diesen beyden abgekürzten Divisionen als Dividenden vorausgesetzten Zahlen beträgt weniger als $S = u + b + 2(m + n - u + h) + 1$, dieses bis in den Rang $u - h$ hinabgehend gedacht (II, 3, e.). Da S als eine h zifrige Zahl angenommen worden, mithin nicht in den Rang u hinaufreicht, so kann noch weniger jener Unterschied so viel als 1^{u} ausmachen. Es muß also der Unterschied zwischen den beyden daraus entstehenden Quotienten weniger als 1^{u-m} betragen. Den letzten dieser Quotienten, entspringend aus dem gegebenen, bis in die Stelle des ($u - h$)ten Ranges möglichst genäherten Dividend, und dem gleichfalls gegebenen bis in die Stelle des ($u - n - h$)ten Ranges möglichst genäherten Divisor kann man in der That berechnen. Er wird auf keinen Fall kleiner seyn, als der erstgenannte, bis in die Stelle des Ranges $u - m - h$ herabgeführte, Quotient B, der sich nicht geradezu erhalten läßt. Aber er kann denselben nicht um so viel als 1^{u-m} beträgt, übertreffen. Nimmt man ihn also für B selbst, so kann er gar wohl als Ausdruck von B, zu groß, aber gewiß nicht zu klein seyn. Er wird zuverlässig zu groß, wenn man in der Stelle des Ranges $u - m$, mit Weglassung der folgenden 1 eine Einheit

zuletzt, dagegen eben so sicher zu klein, wenn man in der nemlichen Stelle 1 von ihm abzieht, ist also, nachdem das Letzte geschehn, eine bis in die Stelle des Ranges u — m unvollkommen genäherte Zahl. Daraus ergibt sich sogleich nachstehende Regel.

8. Wenn, Dividend und Divisor als entwicklungsfähige Zahlen gedacht, der Quotient eine bis in die Stelle des Ranges v unvollkommen genäherte Zahl werden soll, und die höchste Zifer des Divisor $\overset{m}{a}$, die aus ihm und dem Dividend sofort abzuleitende höchste Zifer des Quotienten $\overset{n}{b}$ ist, so bilde man zuvörderst (in dem vorigen Satze u — m = v setzend)

$$S = a + b + 2\,(n + k - v) + 1$$

und suche den Werth von k, wodurch S eine k zifrige Zahl wird. Dieser heiße h. Alsdann entwickle man den Divisor bis in den Rang m + v — n — h, den Dividend und die von ihm bey der vorzunehmenden verkürzten Division abzuziehenden verkürzten Producte bis in den Rang m + v — h. Der Quotient, bis in die Stelle des Ranges v berechnet, wird in seiner letzten Stelle, um eine Einheit verringert, soweit er reicht, eine unvollkommen genäherte Zahl seyn *). Um die so

*) Sollte der Bruch $^{5673583}/_{3}$ dividirt werden durch $^{3}/_{7000}$, und würde der Quotient bis in die Stelle des Ranges u = — 4 unvollkommen genähert verlangt, so wäre $\overset{m}{a} = \overset{-4}{4}$, und da der Dividend mit $\overset{5}{18}$ beginnt, $\overset{n}{b} = \overset{9}{4}$. Es würde $S = a + b + 2\,(n + h = u) + 1$, für $h = 2 = 4 + 4 + 2\,(9 + 2 + 4) + 1 = 39$. Man entwickle nun den Dividend bis in die Stelle des

gefundene Zahl prüfen zu können, mag man den Quotienten bis in die Stelle des Ranges v — h entwickeln,

Ranges m + n — 2 = — 10; den Divisor bis in die des Ranges m + u' — n — 2 = — 19; den Quotienten bis in die des Ranges u = 4, oder, um ihn zu prüfen, in die Stelle des Ranges u — h = — 6 durch verkürzte Division. Die Rechnung steht so:

```
0,0004285714285714285 | 1891194,3333333333 | 441278677,7777 | 78
                      | 1714285 7142857140 |
                        176908 6190476193    Also der Quotient:
                        171428 5714285714    441278677,7776.
                          5480 0476190479    unvollkommen ge-
                          4285 7142857142    nähert bis in seine
                          1194 3333333337    unterste Stelle.
                           857 1428571428
                           337 1904761909
                           299 9999999999
                            37 1904761910
                            34 2857142855
                             2 9047619055
                             2 5714285714
                               3333333341
                               2999999999
                                333333342
                                299999999
                                 33333343
                                 29999999
                                  3333344
                                  2999999
                                   333345
                                   299999
                                    33346
                                    29999
                                     3347
                                     2999
                                      348
                                      342.
```

bis in welche hinab er richtig seyn würde, wenn der gebrauchte Dividend in Wahrheit das bis in die Stelle des Ranges m + v — h unvollkommen genähert herabgeführte Product aus Divisor und Quotient wäre. Da aber dieses, um weniger als $S = a + b + 2 (n + h - v) + 1$ kleiner ist, wie der würklich gebrauchte, bis in die Stelle möglichst genäherte Dividend, so suche man den niedrigsten Werth von k, welcher a^{k} größer als S ausfallen läßt. Alsdann wird (II, 4, β.) 1^{k-m}, von dem gefundenen Quotienten abgezogen, schon zu wenig geben, mithin Grenzen für das Gesuchte darbieten, die in der Regel eine genauere Bestimmung gestatten *).

Es ist allgemein bewiesen durch die voranstehenden Betrachtungen: daß aus jeder von den arithmetischen Grundoperationen, an und mit Zahlen, die zu jedem gewünschtem Range hinab möglichst genähert werden können, ein Resultat erhalten werden kann, welches bis in die Stelle eines beliebig gewählten Ranges unvollkommen genähert ist.

*) In dem vorigen Beyspiele war $S = 39^{-10}$, $a = 4$, also ist $a^{k} = 4^{-9}$ und $1^{k-m} = 1^{-5}$. Mithin der Quotient, wenn seine Decimalstellen ,777768 werden, zu klein; folglich derselbe, mit den Decimalstellen, ,77776 eine, soweit er reicht, unvollkommen genäherte Zahl. Der wahre Quotient, aus der Entwicklung des Bruchs $^{3971508 1000}/_{9}$ entstehend, ist 441278677,77777 . . .

Verlangt man ein solches Resultat bis in einen beliebigen Rang möglichst genähert, so hat man es zuvörderst bis in den nächstniedrigeren Rang unvollkommen genähert zu suchen, und wird alsdann, wenn man die letzte Zifer der erhaltenen, unvollkommen genäherten, Zahl wegwirft, in dem Uebrigbleibenden, soweit es reicht, eine möglichst genäherte Zahl haben, den Fall ausgenommen, wo die wegzuwerfende Zifer 9 ist, in welchem eine weitere, allemal mögliche Untersuchung zu entscheiden hat (I, 3.), ob die obige Regel gültig bleibt, oder ob die unterste bleibende Zifer um 1 erhöht werden muß.

Auf jeden Fall also darf man als Resultat der bisherigen Untersuchungen den allgemeinen Satz behaupten: wenn die Zahlen mit denen man rechnet, bis in jeden beliebigen Rang möglichst genähert werden können, so läßt sich allemal das Resultat der Rechnung als eine Zahl, die bis in jeden willkührlich zu wählenden Rang unvollkommen genähert, es läßt sich auch als eine Zahl, die bis dahin möglichst genähert ist, erhalten.

Das Erste kann nach allgemeinen, keiner Ausnahme oder Modification unterworfenen Regeln geleistet werden; auch das Zweyte ist nach sicheren Regeln zu erreichen, die aber in besonderen Fällen besondere Modificationen, meistens von beschwerlicher Art, erfordern.

Das Verfahren wird sich in einzelnen Fällen noch abkürzen lassen, und oft eine engere Begrenzung gestatten, als seine allgemeinen Regeln versprechen.

III. Genähertes Quadriren und genähertes Ausziehn der Quadratwurzel.

1. Was das Quadriren betrifft, so ergibt sich durch bloße Specialisirung der allgemeinen Regeln für die Multiplication von selbst, daß aus dem Quadrate einer möglichst genäherten Zahl, die im nten Range anhebt und im n — pten endigt, mithin selbst p + 1 reelle Zifern enthält, die letzten p + 1 Zifern wegfallen müssen, wofern ihr Doppeltes zu keinem höheren Range als sie selbst aufsteigt; die letzten p + 2 Zifern, wofern dieses der Fall ist: wenn das Bleibende bis in seine unterste Stelle als unvollkommen genähert gelten soll (II, 3, *α.*).

Man erhält auf gleichem Wege aus dem Vorhergehenden (II, 3, *ε.*) die Regel: soll das Quadrat einer mit der Zifer $\overset{n}{a}$ anhebenden Zahl, berechnet durch verkürztes Multipliciren dieser Zahl mit sich selbst, so erhalten werden, daß es bis in den uten Rang unvollkommen genähert ist, so bestimme man zuvörderst h so, daß 2 (a + 2n — u + h) + 1 eine h zifrige Zahl wird, entwickle alsdann die durch verkürztes Multipliciren zu quadrirende Zahl bis in den Rang u — n — h; die einzelnen Schichten der Producte bis in den Rang u — h, und werfe von ihrer Summe die letzten h Zifern weg *).

*) Will man $(\frac{7}{11})^2$ bis in die Stelle des Ranges — 7 unvollkommen genähert haben, so ist hier a = 6, n = — 1, u = — 7, also h = 2. mithin u — n — h = — 8, und u — h = — 9. Die Rechnung ergibt:

2. Das Ausziehn der Quadratwurzel verlangt eine eigenthümliche Betrachtung.

Sey die höchste Zifer paaren Ranges in einer Zahl A vom Range 2n; die niedrigste, worin sie, möglichst genähert, abgebrochen worden, vom Range r. Sey die Quadratwurzel aus dieser Zahl A durch $\mathfrak{A}$ angedeutet, so wird die höchste Zifer der letzteren vom Range n werden. Setzte man nun statt A an die Stelle $A + \overset{r}{1}$, so wäre dieses zuviel; also auch $\sqrt{(A + \overset{r}{1})}$, welches größer als $\sqrt{A} = \mathfrak{A}$ ist. Aber $\sqrt{(A + \overset{r}{1})}$ ist selbst nicht so groß als $\mathfrak{A} + \frac{\overset{r}{1}}{2\mathfrak{A}}$, weil Letzteres, zum Quadrat erhoben, mehr als $\mathfrak{A}^2 + \overset{r}{1} = A + \overset{r}{1}$ gibt. Da aber $\frac{\overset{r}{1}}{2\mathfrak{A}}$, wenn $2\mathfrak{A}$ bis in den Rang n hinaufgeht, jedenfalls kleiner ist als $\overset{r-n}{1}$, und, wofern $2\mathfrak{A}$ bis in den Rang n + 1 aufsteigt, kleiner als $\overset{r-n-1}{1}$, so

```
7/11 = 0,63636363
       0,63636363
       ----------
       0,381818178
          19090908
           3818181
            190909
            381881
              1909
               381
                19
                 3
       ----------
       0,40495866|9
```

der wahre Werth von $(7/11)^2 = 49/121$ ist 0,40495867.

darf man behaupten, daß Alles, was der Quadratwurzel aus A zugelegt werden würde, sofern die Zahl A nicht in der Zifer des rten Ranges abgebrochen wäre, weil es weniger beträgt als $\overset{r}{\frac{1}{2\mathfrak{A}}}$, die Quadratwurzel aus A, welche $= \mathfrak{A}$ seyn sollte, weniger affiziren kann, als $\overset{r-n}{1}$ oder $\overset{r-n-1}{1}$, je nachdem $2\mathfrak{A}$ von gleichem Range mit $\mathfrak{A}$ bleibt, oder zu dem nächsthöheren aufsteigt.

Es wird also die Quadratwurzel A aus einer Zahl, auf eben so viele Zifern nach ihren eigenen höchsten unvollkommen genähert seyn, als die Zahl A selbst deren nach der höchsten vom paaren Range, die in ihr vorkommt, noch nachfolgende enthält, wenn $2\mathfrak{A}$ zu keinem höheren Range aufsteigt als $\mathfrak{A}$; im gegentheiligen Falle noch auf eine mehr *).

Es würde diesem gemäß eine ganz unrichtige Regel seyn, wenn man behaupten wollte, ein Bruch müßte jedesmal, wenn man die Quadratwurzel aus ihm bis in eine bestimmte Decimalstelle möglichst genähert erhalten will, auf doppelt so viele Decimalstellen durch Division entwickelt, und alsdann, soweit er reicht, der Operation unterworfen werden.

*) So ist z. B., wenn man $A = \frac{1}{3} = 0{,}333333$ setzt, und damit abbricht, die Quadratwurzel daraus auf sechs Decimalstellen gezogen, $\mathfrak{A} = 0{,}577349$, bis in die letzte Stelle unvollkommen genähert. Denn hier ist $2n = -2$; A hat noch 4 Zifern hinter der vom Range -2; $2\mathfrak{A}$ steigt im Range um 1 höher als $\mathfrak{A}$; es wird also $\mathfrak{A}$ bis in die fünfte Zifer nach seiner höchsten unvollkommen genähert seyn. Der wahre Werth von $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist 0,577350.,

IV. Genäherte Logarithmenrechnung.

1. Die Zahlen, mit denen durch Hülfe der Logarithmen gerechnet wird, selbst als genau gedacht.

Da fast immer, wenn auch Zahlen selbst richtig sind, deren Logarithmen nur genähert, und in ihrer letzten Zifer abgebrochen seyn werden, so ist es eine Aufgabe unentbehrlicher Art, zu bestimmen, welcher Grad von approximativer Genauigkeit bey dem Rechnen mit diesen, sofern es nach den vier Grundregeln geschieht, gestattet sey.

α. Die Aufgabe würde am leichtesten zu lösen seyn, wenn in den Tafeln bey dem Abbrechen der Logarithmen deren bleibende letzte Zifer ungeändert gelassen wäre. Denn alsdann würde jeder Logarithme an sich zu klein seyn, aber durch Zulegen einer Einheit zu seiner letzten Zifer zu groß werden.

Unter dieser Voraussetzung würde in Beziehung auf die erste und dritte Regel der Logarithmenrechnung, der Logarithme eines Products aus n Factoren, also auch der Logarithme der nten Potenz, nach den Grundregeln bestimmt, zu klein; um n Einheiten vom Range seiner letzten Zifer vermehrt, zu groß werden; die für beyde Voraussetzungen aus den Tafeln genommenen zugehörigen Zahlen würden die Grenzen ergeben, zwischen denen das Resultat selbst enthalten seyn müßte. Bey der Division würde der nach der Grundregel bestimmte Logarithme des Quotienten um 1 vermindert, zu wenig, um 1 vermehrt, zu viel betragen, also die beyden diesen Logarithmen zugehörigen Zahlen die Grenzen darstellen, zwischen denen der Quotient selbst eingeschlossen

wäre. Bey der Wurzelausziehung endlich würde, wenn der Grad derselben allgemein n heißen soll, der an sich zu kleine Logarithme von $\sqrt[n]{a}$, um $\frac{1}{n}$ in seiner letzten Stelle vermehrt, schon zu groß werden, so daß also $\sqrt[n]{a}$ zwar aus den Tafeln zu klein, aber noch in seiner letzten Stelle, der äußersten durch die Tafeln zu erhaltenden, richtig gefunden werden müßte.

β. Die gewöhnlichen Tafeln haben aber die letzte Zifer des abgebrochenen Logarithmen nur dann ungeändert gelassen, wenn die folgende weniger als 5 betrug; im gegentheiligen Falle haben sie derselben eine Einheit zugelegt. Auf diese Art weicht jeder Logarithme um weniger als die Hälfte einer Einheit seiner letzten Stelle von der Richtigkeit ab; der des Products von n Factoren, so wie der der nten Potenz, also weniger als n . ½ einer Einheit seiner letzten Stelle; der des Quotienten weniger als 1; der Logarithme der nten Wurzel weniger als $\frac{1}{n}$. ½ einer Einheit der genannten letzten Stelle. Aber da man nicht weiß, ob die aus den gewöhnlichen Tafeln genommenen Logarithmen zu klein oder zu groß sind, und bey Grenzbestimmungen immer nur die äußersten Fälle berücksichtigt werden müssen, so bleibt nichts übrig, als festzusetzen, es sey möglich, daß die aus den Tafeln genommenen Logarithmen alle zu klein, es sey aber eben sowohl möglich, daß diese Logarithmen alle zu groß gewesen seyn könnten, wo denn ihr Betrag, nachdem man im ersten Falle den aus der Rechnung entstandenen Logarithmen das Nöthige zugelegt, zuviel, im zweyten, das Nem-

liche davon abgezogen, zu wenig ergeben müßte. Die gewöhnliche Einrichtung der Tafeln bringt also die Gewißheit, daß eine stärkere Näherung, als erreichbar gewesen seyn würde, wenn jeder Logarithme in ihnen ohne Zusatz abgebrochen wäre, bey ihrem Gebrauch vorhanden ist. Aber sie gibt eben so weit von einander abstehende Zahlen, wenn die Grenzen für die Richtigkeit des Resultats würklich angegeben werden sollen, und läßt es unbestimmt, ob dieses zu groß oder zu klein ausgefallen ist.

Ein an der Endzifer des Logarithmen leicht anzubringendes Zeichen, angebend ob derselbe zu klein oder zu groß sey, würde diesem Uebelstande abhelfen können *).

Auf jeden Fall würde es durchaus unrichtig seyn, wenn man annehmen wollte, daß die Resultate der Logarithmenrechnung jedesmal auf die nemliche Zahl von Zifern, bis in die letzte genähert erhalten werden könn-

*) Die als Anhang diesem Lehrbuche beygegebenen Tafeln haben eine solche Einrichtung erhalten. Alle darin enthaltenen abgebrochenen Zahlen sind zu klein. Steht an der letzten Zifer einer solchen unten kein Punct, so ist die Zahl um weniger als die Hälfte einer Einheit vom Range dieser Zifer, steht ein Punct unten neben ihr, so ist sie um mehr als jene Hälfte durch das Abbrechen verringert. Ist oben an ihre Endzifer kein Punct gesetzt, so ist das bey ihr Weggelassene geringer, als das bey der unmittelbar vor ihr vorhergehenden Weggebliebene; steht oben an ihrer Endzifer ein Punct, so beträgt das durch Abbrechen Weggelassene bey ihr mehr als bey der nächstvorhergehenden.

ten, wenn die Logarithmen selbst bis in die nemliche Decimalstelle möglichst genähert hinabgehn.

2. Wenn die Zahlen, mit denen durch Logarithmen gerechnet wird, genäherte sind.

Wenn die Zahlen, mit denen man rechnet, bis in ihre unterste Zifer möglichst genäherte sind, so wird man aus den Tafeln die Zusätze, welche ihren Logarithmen beygefügt werden müßten, wofern die Zahlen selbst in ihrer untersten Zifer um 1, und davon die Logarithmen eben so, vergrößert würden, sogleich abnehmen können. Diese Z..sätze mögen Incremente der Logarithmen heißen, man kann sie aus den Tafeln mit den Logarithmen zugleich nehmen, und diesen jedesmal nachsetzen. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die vier Grundregeln der Logarithmenrechnung auf folgende Art formen, vorausgesetzt, daß alle Tafellogarithmen zu klein sind.

α. Addirt man die Logarithmen der Factoren eines Products selbst, so ist diese Summe zu klein; vermehrt um die Summe von den Incrementen jener Logarithmen, wird sie zu groß, um den Logarithmen des gesuchten Products darzustellen. Die Zahlen, denen jene erste Summe und dieses letzte Resultat als Logarithmen angehören, sind alsdann die Grenzen, zwischen denen das gesuchte Product enthalten ist.

β. Die Differenz zwischen den Logarithmen des Dividend und Divisor, verringert um das Increment des ersten, gibt einen Logarithmen, der zu klein, vermehrt um das Increment des zweyten, einen, der zu groß ist;

zwischen den Zahlen, die beyden Logarithmen angehören, liegt der Quotient.

γ. Wenn A nur durch eine genäherte Zahl, α, ausgedrückt ist, und A^n berechnet werden soll, so gibt $n \log \alpha$ zu wenig; vermehrt aber nun das $n$fache des Increments von $\log \alpha$ zuviel, um den Logarithmen des Gesuchten auszudrücken. Ist, wie bey Wurzelausziehungen, n ein echter Bruch, so kann jenes $n$fache des Increments von $\log \alpha$ zu klein werden, um einen Unterschied zwischen den Zahlen, wovon die eine dem Logarithmen $n \log \alpha$, die andere dem $n \log \alpha + n$ Increment von $\log \alpha$ zugehört, soweit die Tafeln reichen, zu ergeben.

Bey den logarithmischen Tafeln, worin die Logarithmen bald zu klein, bald zu groß sind, hat die Ausführung noch besondere Rücksichten zu nehmen.

Siebentes Capitel.

Ueber Verhältnisse, Proportionen sowohl unter Zahlen als würklichen Größen, die noch nicht in Zahlen ausgedrückt sind, und Progressionen.

I. Verhältnisse, Proportionen und Zusammensetzung von Verhältnissen unter Zahlen.

Obschon die gewöhnliche arithmetische Lehre von den Verhältnissen zweyer gegebenen Zahlen mit der von der Subtraction und Division, die von den Proportio-

nen mit besonderen Fällen der Theorie von den einfachen Gleichungen des ersten Grades, völlig dieselbe ist, und in sofern in der Arithmetik bey ihrem jetzigen Zustande überflüssig seyn dürfte, so ist sie doch in den bisherigen Vortrag der mathematischen Wissenschaften so verwebt, und in Beziehungen auf anderweitige Größenbetrachtungen von so erheblicher Art gesetzt, daß eine Kenntniß von ihr nicht wohl entbehrt werden kann.

A. Das arithmetische Verhältniß zweyer Zahlen besteht in ihrem Unterschiede; der Minuend pflegt bey dieser Terminologie das vorhergehende Glied; der Subtrahend das nachfolgende; der Rest selbst der Exponent oder Name des arithmetischen Verhältnisses genannt zu werden.

Eine Gleichung, worin die Unterschiede von zwey Paar Zahlen einander gleich gesetzt werden, die Gleichheit zweyer arithmetischen Verhältnisse, heißt eine arithmetische Proportion. $a - b = c - d$. Die vier Zahlen, wovon in dieser Gleichung die Rede ist, sind die Glieder der Proportion, die man, nach ihrer Folge und Stellung gegeneinander, in äußere und mittlere, ähnlich liegende und unähnlich liegende einzutheilen pflegt. Sind die beyden mittleren Glieder unter einander gleich, so wird die Proportion stetig (continua) genannt. Ihr letztes Glied pflegt die vierte arithmetische Proportionale zu den drey andern zu heißen.

Als einen Hauptsatz in der Lehre von diesen Proportionen führt man, was eine leichte Folge einfacher Transposition ist, an: daß in jeder arithmetischen Proportion die Summe der äußeren Glieder eben so viel als die Summe der mittleren beträgt. Wenn $a - b$

$= c - d$, so ist $a + d = b + c$. In den stetigen also die Summe der äußeren Glieder soviel, als das Doppelte des mittleren. Wenn $a - b = b - c$, so ist $a + c = 2b$.

B. Das geometrische Verhältniß zweyer gleichartigen Zahlen besteht in ihrem Quotienten, weswegen denn jedesmal diese beyden Zahlen in unbenannte verwandelt werden dürfen. Die Gleichheit zweyer, durch Dividend und Divisor, woraus sie erwachsen sollen, gegebenen Quotienten, stellt eine geometrische Proportion dar. Die Terminologie ist hier wie bey arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

In jeder geometrischen Proportion, deren Glieder unbenannte Zahlen sind, beträgt das Product der äußeren Glieder soviel, als das Product der mittleren. Wenn $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$. In der stetigen also ist das Product der äußeren Glieder dem Quadrate des mittleren gleich. Wenn $a : b = b : c$, so ist $ac = b^2$. Man kann also in jeder Proportion die vierte Zahl finden, wenn man das Product der zweyten und dritten durch die erste dividirt $d = \frac{bc}{a}$, oder die dritte, wenn man das Product der ersten und vierten durch die zweyte dividirt $c = \frac{ad}{b}$. Die gefundene heißt alsdann die vierte Proportionale zu den drey anderen. Man kann in einer stetigen Proportion die mittlere Größe erhalten, wenn man aus dem Producte der beyden äußeren die Quadratwurzel zieht. Wenn $a : b = b : c$, so ist $b = \sqrt{(ac)}$. Daher pflegt wohl die Quadratwurzel aus dem Producte zweyer Zah-

len, die zwischen ihnen liegende mittlere geometrische Proportionale genannt zu werden. Auf ähnliche Art wird, in Beziehung auf die stetigen arithmetischen Proportionen die Summe zweyer Zahlen, zur Hälfte genommen, die mittlere arithmetische Proportionale, oder das arithmetische Mittel zwischen ihnen genannt.

So wie sich jede Gleichung dadurch, daß man auf beyden Seiten gleiche Aenderungen vornimmt, auf mancherley Art umformen läßt, ohne daß die Gleichheit selbst dadurch gestört würde, so ist dies namentlich auch bey den Proportionen möglich. Man hat sich die Mühe gemacht, für viele dieser kleinen Umformungen eigene Benennungen einzuführen. Die gewöhnlichsten davon sind folgende:

1. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a : c = b : d$, welche Aenderung der Gestalt permutando geschehn ist.
2. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $b : a = d : c$, invertendo.
3. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $(a + c) : (b + d) = a : b$, welches antecedentes et consequentes summando gefunden wird.
4. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $(a - c) : (b - d) = a : b$, antecedentes et consequentes differentiando.
5. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a : (a - b) = c : (c - d)$, convertendo.
6. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $(a + b) : b = (c + d) : d$, componendo.
7. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch $(a - b) : b = (c - d) : d$, dividendo.

Es verlohnt sich der Mühe nicht, die Ableitung dieser Sätze, die sich jedem, der mit Gleichungen umzugehn weiß, von selbst ergeben, ausführlich beyzubringen.

C. Wenn mehrere Zahlen vorhanden sind, so daß immer das Verhältniß, worin die vorhergehende von ihnen zur unmittelbar nachfolgenden steht, gegeben ist, und man dadurch das Verhältniß findet, in welchem zwey von solchen Zahlen zu einander stehn, die sich nicht unmittelbar folgen, so sagt man, es sey eine Zusammensetzung mehrerer Verhältnisse zu einem neuen vorgegangen. Sehr unschicklich hat man sich, um diese Vereinigung anzudeuten, des + Zeichens bedient. Wenn man zwischen A und B das Verhältniß (A : B) kennt, und ebenso das zwischen B und C, (B : C), so soll der Ausdruck (A : C) = (A : B) + (B : C) sagen, daß sich aus einer Verbindung der beyden letzten Verhältnisse das erste finden lasse; an eine Addition ist dabey gar nicht zu denken, und ihr Zeichen wird auf diese Art gegen seinen sonstigen Sinn gebraucht.

Wie diese Verbindung der gegebenen Verhältnisse bewerkstelligt werden könne, ergibt sich sogleich von selbst, sobald man diese Ausdrücke auf ihre arithmetische Bedeutung zurückführt. Der Satz: das Verhältniß zweyer Zahlen ist gegeben, A : B = n : m, sagt arithmetisch so viel als: die Zahl ist bekannt, womit die eine von ihnen multiplicirt werden muß, damit die andere entstehe. $A = \frac{n}{m} B$. Ist also die zweyte selbst wieder auf eine ähnliche Art durch eine dritte gegeben, B : C

= p : q, durch $B = \frac{p}{q} \cdot C$, so kommt der Ausdruck der ersten durch die dritte nur darauf an, in einer Zahl, $A = \frac{n}{m} B$, für das, was ursprünglich als ihre Einheit gegeben war, B, einen abgeleiteten Werth, worin diese Einheit selbst wieder vermöge einer Zahl durch eine andere ausgedrückt wird, $B = \frac{p}{q} C$, an die Stelle zu setzen; das heißt, es wird eine Multiplication von zwey gegebenen Zahlen erfordert.

$$A = \frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} \cdot C = \frac{np}{mq} \cdot C.$$

In der gewöhnlichen Terminologie lautet dieser Satz so: wenn zwey Verhältnisse zu einem dritten zusammengesetzt werden sollen, so mache man das Product ihrer vorhergehenden Glieder zum vorhergehenden, das ihrer nachfolgenden zum nachfolgenden Gliede eines neuen Verhältnisses.

$$\text{Wenn } \begin{array}{l} A : B = m : n \\ B : C = p : q \\ \hline \end{array}$$

$$\text{so ist } A : C = pm : qn.$$

Liefen die Reductionen der successiv folgenden Zahlen auf einander fort, oder, was damit einerley ist, wären noch mehrere, in stetiger Proportion auf einander folgende Verhältnisse gegeben, so würde die nemliche Regel der Verknüpfung für sie alle beybehalten.

Das Verhältniß der Gleichheit kann als 0 bey der Zusammensetzung der Verhältnisse angesehen werden. Die beyden Verhältnisse m : n und a : a geben, zu-

sammengesetzt $ma : na = m : n$, es ist also zu dem ersten eigentlich nichts hinzugesetzt.

Ein Verhältniß, dessen Glieder der Größe nach dieselben, der Ordnung nach aber umgekehrt wie bey einem andern sind, darf als diesem in der Zusammensetzung widerstreitend angesehn werden. $m : n$ und $n : m$ geben, wenn man sie zusammensetzt, $mn : nm = 1 : 1$.

Wenn mehrere Verhältnisse zu einem neuen zusammengesetzt werden sollen, so ist der einfachste Fall, sie sämmtlich gleich anzunehmen. So wie sich durch Zusammensetzung gleicher Verhältnisse neue höhere bilden lassen, so gibt es auch umgekehrt eine Zerlegung gegebener Verhältnisse in andere niedrigere, unter einander gleiche, von vorgeschriebener Zahl. Und endlich entsteht eine Vergleichung von zwey gegebenen Verhältnissen, vermöge deren die Art, wie das eine aus dem andern durch Zerlegung oder Zusammensetzung gebildet seyn kann, ausgedrückt werden soll. Eine Zahl, die diese Art darstellt, wird Logarithme genannt; sie zählt gewissermaaßen die gleichen Verhältnisse, welche in einem andern gegebenen enthalten sind. Man sieht leicht, daß alle diese Vorstellungsarten auf die Begriffe von Producten und Potenzen zurückkommen, und bey gehöriger Entwicklung derselben als vollkommen überflüssig erscheinen.

II. Geometrische Verhältnisse, Proportionen und Proportionalitäten in Beziehung auf würkliche Größen.

a. Das geometrische Verhältniß zweyer gleichartigen Größen untersuchen, heißt: nach einer Regel

forschen, vermöge deren die eine derselben aus der anderen, die erste als zu bestimmend, die andere als gegebenes Maaß oder Maaßgröße gedacht, in Absicht auf die ihr beyzulegende Vielheit von Theilen, abgeleitet werden könnte; oder kürzer: die Messung der einen durch die andere unternehmen, und das erhaltene Resultat angeben.

Es wird also dabey eine Vergleichung zwischen zwey Größen beabsichtigt, wie sie die Division zwischen zwey gegebenen gleichbenannten Zahlen leistet, und wenn alle gleichartigen Größen sich sofort in gleichbenannten Zahlen ausdrücken ließen, so würde der Quotient dieser Zahlen den Ansatz des geometrischen Verhältnisses jener Größen erledigen.

Aus diesem Grunde ist das Zeichen eines solchen Verhältnisses unter Größen überhaupt, ein :, zwischen die Zeichen der auszumessenden Größe $\mathfrak{A}$, und ihres Maaßes A gesetzt, $\mathfrak{A} : A$, in der Arithmetik das Divisionszeichen geworden.

Die Forderung eines solchen Ansatzes $\mathfrak{A} : A$, ist vollkommen befriedigt, sobald ein echter Bruch, $\frac{1}{n}$, gefunden werden kann, der als Quote, d. h. als Angabe eines zu nehmenden aliquoten Theils der jedesmaligen Maaßgröße, A, gebraucht, diesen Theil der Maaßgröße so ausfüllen läßt, daß irgend ein Vielfaches desselben die zu messende Größe genau auszudrücken vermag. Ist, unter n und m irgend ganze Zahlen verstanden, $\frac{1}{n}$ A so beschaffen, daß $m \cdot \frac{1}{n} A = \mathfrak{A}$, so hat sich die letzte Größe, als eine bestimmte, genau an-

gegebene Vielheit von Theilen, die aus der ersten abgeleitet sind, dargestellt.

Unvollkommen hingegen, nicht ohne zurückbleibende Unsicherheit, und bloß näherungsweise, wird den Forderungen des Ansatzes 𝔄 : A entsprochen, wenn man es nur dahin bringt, zwey nächstbenachbarte Vielfache des aus der gewählten Quote $\frac{1}{n}$ entstehenden aliquoten Theils der gegebenen Maaßgröße, $\frac{1}{n}$ A, welche, $m \cdot \frac{1}{n}$ A das eine, $(m + 1)\frac{1}{n}$ A das andere, die gesuchte Größe 𝔄 zwischen sich fassen, zu erhalten, und dabey stehn bleibt, diese Grenzen für dieselbe anzugeben.

Sind die Größen 𝔄 und A commensurabel, so muß sich irgend ein aliquoter Theil der einen, $\frac{1}{n}$ A, finden lassen, von der die andere, 𝔄, ein Vielfaches, $𝔄 = m \cdot \frac{1}{n}$ A, ist. Sind sie incommensurabel, so wird dieses niemals der Fall seyn, mithin nichts weiter übrig bleiben, als Einschließung der gesuchten Größe zwischen zwey nächstbenachbarte Vielfache eines solchen aliquoten Theils. Aber es ist alsdann, so wie überhaupt, gestattet, solche Grenzen, zwischen welche man die zu messende Größe einschließt, so eng zusammen zu ziehn als man will, mithin zu bewürken, daß die bey der Bestimmung übrigbleibende Unsicherheit weniger als irgend eine willkührlich angenommene Kleinheit, d, beträgt. Denn daß bey beliebiger Wahl des n, die Größe nd beträchtlicher als A werden kann, versteht sich von

selbst. Alsdann aber ist $\frac{1}{n}$ A kleiner als d, es fehlt also weniger als $\frac{1}{n}$ A angibt, wenn $\mathfrak{A} = m \cdot \frac{1}{n}$ A gesetzt wird.

b. **Gleichmäßig** heißen zwey messende Vergleichungen, wenn die Quote, oder der Bruch $\frac{1}{n}$, welcher bestimmt, was für ein aliquoter Theil der jedesmaligen Maaßgröße zur Zusammensetzung der auszumessenden gewählt worden, für beyde Vergleichungen der nemliche ist.

Man sagt von gleichmäßigen messenden Vergleichungen, daß sie **gleichlautende Resultate** geben, wenn sie die beyden auszumessenden Größen, bezogen auf die bey ihrer Bestimmung gebrauchten, durch identische Quoten aus den Maaßgrößen abgeleiteten aliquoten Theile, als die nemlichen Vielfachen dieser Theile oder enthalten zwischen den nemlichen Vielfachen derselben, erscheinen lassen. Die angesetzte Gleichheit zweyer geometrischen Verhältnisse, oder die **geometrische Proportion** zwischen vier Größen, $\mathfrak{A} : B = \mathfrak{B} : B$, drückt aus, daß die messende Vergleichung zwischen der ersten und zweyten Größe, $A : \mathfrak{A}$, und die zwischen der dritten und vierten, $\mathfrak{B} : B$, die erste beliebig, aber die zweyte ihr gleichmäßig angestellt, gleichlautende Resultate geben. Findet sich also bey der ersten Vergleichung $\mathfrak{A} : A$, daß $\mathfrak{A} = m \cdot \frac{1}{n}$ B, so muß die zweyte $\mathfrak{B} = m \cdot \frac{1}{n}$ B ergeben. Hat die

erste Vergleichung gezeigt, daß 𝔄 zwischen m . $\frac{1}{n}$ A und (m + 1) . $\frac{1}{n}$ A liege, so muß die zweyte ausweisen, daß 𝔅 zwischen m . $\frac{1}{n}$ B und (m + 1) $\frac{1}{n}$ B enthalten sey, wenn 𝔄 : A = 𝔅 : B statt haben soll.

c. Eine Größe 𝔅, von welcher angegeben wird, daß sie die vierte geometrische Proportionale zu drey anderen gegebenen zu betrachten sey, ist als unzweydeutig und nur eines Werthes fähig dadurch bezeichnet.

Findet sich 𝔄 = m . $\frac{1}{n}$ A und also 𝔅 = m . $\frac{1}{n}$ B, so wird eben dadurch 𝔅 vollendet und einförmig gegeben. Kann aber, wie man auch die Quote $\frac{1}{n}$ wählen möge, nur das Resultat erhalten werden, daß 𝔄 zwischen m . $\frac{1}{n}$ A und (m + 1) $\frac{1}{n}$ A liege, mithin 𝔅 zwischen den Grenzen m . $\frac{1}{n}$ B und (m + 1) . $\frac{1}{n}$ B enthalten seyn müsse, wodurch also der gesuchte Werth des 𝔅 nicht vollendet herausgebracht ist, so darf man dennoch behaupten, daß dieser gesuchte Werth der vierten Proportionale nicht zweydeutig seyn, oder das eine Mal den Betrag β, das andere Mal den Betrag $\beta + \delta$ erhalten könne, δ möge seyn was es wolle.

Denn man nehme die bey der Vergleichung beliebig zu wählende Quote $\frac{1}{n}$ so, daß $\frac{1}{n}$ B kleiner als δ

wird. Das gesuchte 𝔅 soll zwischen $m \cdot \frac{1}{n}$ B und $(m + 1) \cdot \frac{1}{n}$ B liegen, welche Größen um $\frac{1}{n}$ B von einander abweichen; muß also von der ersten unter ihnen, $m \cdot \frac{1}{n}$ B weniger als $\frac{1}{n}$ B beträgt, verschieden seyn. Könnte 𝔅 unter solcher Bedingung zwey Werthe β und $\beta + \delta$ haben, so müßte Obiges von jedem derselben gelten.

Es müßte also, von $\beta + \delta$, $- m \cdot \frac{1}{n}$ B, welches kleiner ist als $\frac{1}{n}$ B, abgezogen $\beta - m \cdot \frac{1}{n}$ B, gleichfalls kleiner als $\frac{1}{n}$ B, ein Rest, δ bleiben, unfehlbar auch kleiner als $\frac{1}{n}$. B. Dies widerspricht der Annahme, laut welcher $\frac{1}{n}$ B kleiner als δ gewählt seyn sollte, beweiset also die Unmöglichkeit zweyer verschiedenen Werthe für 𝔅, sofern dieses dem Ansatz 𝔄 : A = 𝔅 : B gemäß bestimmt werden soll.

d. Alle Größen, welche in wissenschaftlicher Abstraction den Gegenstand der theoretischen Mathematik ausmachen, werden als continuirliche, mithin unzählig vieler einzelnen Werthe fähig gedacht. Wenn zwey solche Größen, sie mögen gleichartig seyn oder nicht, in gesetzmäßiger Verbindung stehn, so muß jeder Werth, welcher etwa der einen ertheilt worden ist, auch für die andere einen bestimmten Werth, den man alsdann den correspondirenden zu jenem ersten zu nennen

pflegt, hervorrufen, und der Ausdruck der Regel, durch welche aus jedem angenommenen Werthe der ersten ursprünglichen Größe, was er auch sey, der correspondirende Werth der anderen, abhängigen, abgeleitet werden kann, macht, so oft er gelingt, das Wesen ihrer gegenseitigen Verbindung deutlich.

Es wird anfangs bey dieser Betrachtung vorausgesetzt, daß nur von einförmigen Größen die Rede ist, das heißt: daß jederzeit diejenige von den zwey verbundenen Größen, welche als die abhängige betrachtet wird, für jeden Werth, den die ursprüngliche erhält, nur einen einzigen, durch jenen bestimmten, ihm correspondirenden Werth annehmen kann.

Die einfachste Form des Zusammenhangs unter zwey continuirlichen Größen, wobey keine Vielförmigkeit statt findet, ist die Proportionalität. Zwey solche Größen sind unter sich, oder die eine ist der andern proportional, wenn zwey beliebige Werthe der einen mit den beyden ihnen correspondirenden der anderen, in der Ordnung, wie sie hervortreten, eine geometrische Proportion bilden. Hat also die erste Größe zwey Werthe, 𝔄 und A, angenommen; hat deswegen die andere auch zwey Werthe, 𝔅 dem B und 𝔄 dem A correspondirend, erhalten, so muß sich jedesmal 𝔄 : A = 𝔅 : B ergeben.

e. Der nachstehende Lehrsatz, einer der wichtigsten für die Kenntniß würklicher Größen, entwickelt ein unfehlbares Kennzeichen der Proportionalität.

Wenn zwey Größen durch das Gesetz ihrer Entstehung so verbunden sind, daß jedem Wachsen der einen ein Zunehmen der anderen correspondirt, und zwar auf

die Art, daß unter sich gleiche Incremente der einen, auch für die andere correspondirende Zunahmen, die unter sich gleich werden, nach sich ziehn, so sind diese Größen einander proportional.

Zuerst ist es unmittelbare Folge einer solchen Annahme, daß dem größeren oder geringeren Wachsen der einen, ein größeres oder geringeres Zunehmen der anderen entsprechen muß. Ferner darf man derselben Annahme gemäß Folgendes behaupten. Unter der Voraussetzung, daß a einen nach Belieben zu wählenden Werth der ersten Größe, b den correspondirenden der zweyten bedeute, wird, wenn die erste (unter m und n irgend ganze Zahlen verstanden) die Werthe:

$a, 2a, 3a \ldots na, \ldots ma, (m + 1) a, \ldots,$

annimmt, die zweyte die Werthe:

$b, 2b, 3b \ldots nb, \ldots mb, (m + 1) b, \ldots$

correspondirend erhalten, weil gleiche Zunahmen der einen mit gleichen Incrementen der andern verbunden seyn sollen. Wüchse endlich die erste über den Werth ma hinaus, noch um ein Increment, α, von dem man wüßte, es sey kleiner als a, so wäre man sicher, daß auch die zweyte über den correspondirenden Werth mb hinaus einen Zusatz, β, erhalten würde, von dem, daß er kleiner als b ausfallen müsse, sicher behauptet werden dürfte, sey es daß er auch sonst unbestimmt bliebe.

Sind nun zwey Werthe der ersten Größe, $\mathfrak{A}$ und A, gegeben, und sollen die ihnen correspondirenden der zweyten $\mathfrak{B}$ und B heißen, so kann man immer die vorhin genannte willkührliche Größe a so wählen, daß A als Vielfaches derselben, $A = na$, erscheint, wo denn auch der in der Folge der Annahme dem Werthe

der ersten, na, correspondirende der zweyten, nb, werden, also, da er B heißen soll, B = nb seyn muß. Zeigt sich ferner 𝔄 = ma, so muß, da diesem Werthe ma der ersten Größe gleichfalls für die zweyte einer = mb correspondirt, und derselbe jetzt 𝔅 heißen soll, mb = 𝔅 seyn. Es ist alsdann folglich:

$$\mathfrak{A} : A = \frac{ma}{na} = \frac{m}{n} = \frac{mb}{nb} = \mathfrak{B} : B.$$

Findet sich hingegen 𝔄 = ma + α, wo α kleiner als a, also 𝔄 zwischen ma und (m + 1) a enthalten, so wird solchem Werthe der ersten Größe, Kraft der Annahme, für die zweyte ein Werth mb + β, wo β kleiner als b seyn muß, correspondiren, also dieser Werth, welcher 𝔅 heißen soll, zwischen mb und (m + 1) b fallen. Es ist folglich auch unter solchen Umständen das Resultat der gleichmäßig zwischen 𝔄 und A, mittelst der Größe $a = \frac{1}{n} A$, und zwischen 𝔅 und B, mittelst der gleichmäßig bestimmten Größe $b = \frac{1}{n} B$, angestellten Vergleichungen ein völlig gleichlautendes, mithin 𝔄 : A = 𝔅 : B.

Dieser Satz berechtigt also allenthalben, wo man eine Größe so an eine andere geknüpft findet, daß gleiche Aenderungen der einen jederzeit unter sich identische Aenderungen der andern herbeyführen, die Beziehung der Proportionalität als zwischen jenen beyden Größen statthabend, ohne Weiteres festzustellen.

III. Progressionen.

Progression oder Reihe ist eigentlich allenthalben, wo eine Menge von Zahlen, nach einem gemeinschaft-

lichen Gesetze sich entwickeln, so daß jede von ihnen, aus der Angabe, die wievielste unter den übrigen sie seyn soll, vermöge einer sich selbst gleichen Regel abgeleitet werden kann. Die einfachsten Formen dieser Art, deren Betrachtung durch elementarische Kenntnisse vollführt werden kann, sind die beyden folgenden.

1. Die arithmetische Reihe, deren successive Glieder sich durch ein fortgesetztes Addiren der nemlichen Größe bilden. Man nimmt eine Zahl beliebig an, das Anfangsglied der Reihe; zu ihr addirt man eine zweyte, willkührlich gewählte Zahl, den Exponenten oder die Differenz der Reihe, um das folgende Glied zu erhalten, und wiederholt diese Addition so wie man zu einem neuen folgenden Gliede fortschreiten will. So muß jedes spätere Glied einer solchen Reihe aus dem Anfangsgliede, und einem Vielfachen des Exponenten bestehn, dessen Zahl eine Einheit weniger als die des Gliedes enthält. Soll a das erste Glied, e der Exponent seyn, so ist $a + e$ das zweyte, $a + 2e$ das dritte, allgemein, $a + (n - 1) e$ das $n$te Glied der arithmetischen Reihe.

Die interessanteste Frage bey einer solchen Reihe ist die nach ihrer Summe; ob sich nemlich nicht für die Addition einer beliebigen Anzahl von ihren Gliedern ein zusammengezogener und im Gebrauche bequemerer Ausdruck, als derjenige, den die Idee der Summe von selbst mit sich führt, ableiten läßt. Dies ist durch Hülfe folgender Betrachtung leicht möglich. Schreitet man in einer arithmetischen Reihe vom Anfange fort, so gewinnt man jedesmal den Exponenten als neuen Theil; schreitet man umgekehrt vom Ende in ihr rück-

wärts, so verliert man jedesmal einen Theil, der dem Exponenten gleich ist. Nimmt man also zwey Glieder zusammen, die vom Anfange und Ende gleich weit abstehn, so wird ihre Summe genau so viel betragen, als wenn man das Anfangs- und End-Glied selbst addirt hätte. Ist also die Zahl der Glieder in der Reihe gerade, d. h., ist es erlaubt, sie beliebig paarweise zusammen zu nehmen, so wird man die Summe des ersten und letzten Gliedes so oft bekommen, als Paare vorhanden sind, d. h., mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. Ist die Zahl der Glieder ungerade, so rechne man das mittelste doppelt, dafür aber den halben Werth eines Paares wieder ab, und man wird genau die vorige Regel auch hier bestätigt finden: die Summe des ersten und letzten Gliedes, mit der halben Anzahl aller vorhandenen Glieder multiplicirt, gibt die Summe der Reihe. In Zeichen:

$$a + (a + d) + (a + 2d) \ldots$$
$$+ (a + (n - 1)d) = (2a + (n - 1)d) \cdot \tfrac{1}{2} n.$$

Wenn das letzte Glied der Reihe: $a + (n - 1)d = u$, schon berechnet gegeben seyn sollte, so verwandelt sich die vorige Formel in die gleichbedeutende, kürzer ausgedrückte: $(a + u) \cdot \tfrac{1}{2} n$.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß Exponent und Anfangsglied der Reihe nach Belieben ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn dürfen.

2. Die geometrische Reihe entsteht, indem man ein Anfangsglied, a, setzt, und eine beliebige Zahl, die auch hier Exponent genannt wird, e, annimmt, um durch Multiplication mit ihr aus jedem vorherge-

henden Gliede das folgende zu erzeugen. So ist $a \cdot e$ das zweyte Glied, $a \cdot e^2$ das dritte, allgemein $a \cdot e^{n-1}$ das nte Glied der geometrischen Reihe. Ihre Summe wird am bequemsten auf dem algebraischen Wege gefunden. Man sehe sie für den Augenblick als schon gefunden an.

$$S = a + a \cdot e + a \cdot e^2 \ldots + a \cdot e^{n-1}.$$

Alsdann multiplicire man auf beyden Seiten dieser Gleichung mit dem Exponenten e, wodurch auf der Seite, welche die einzelnen neben einander gestellten Glieder der Reihe enthält, weiter nichts geschieht, als daß das erste zum zweyten wird, und so überhaupt jedes um eins an Zahl hinaufrückt. Zieht man also von diesem Vielfachen

$$eS = ae + ae^2 \ldots + ae^n,$$

das anfängliche Einfache

$$S = a + ae + ae^2 \ldots + ae^{n-1},$$ ab, so kommt

$$eS - S = -a + ae^n$$

zusammengezogen

$$(e - 1)\, S = a \cdot (e^n - 1)$$

folglich

$$S = \frac{a\ (e^n - 1)}{e - 1}.$$

Wäre vielleicht das letzte Glied der Reihe ae^{n-1} schon berechnet gegeben $= u$, so könnte man diesen Werth in den entwickelten Zähler des Ausdrucks für die Summe, $ae^n - a$ setzen, und erhielte bequemer

$$S = \frac{u \cdot e - a.}{e - 1.}$$

Diese Summationen sind in vielen Rechnungen der gewöhnlichen practischen Arithmetik von großer Erheblichkeit.

Grundlehren

der

Elementargeometrie.

Einleitung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft, welche die Erzeugung, Entwicklung und Vergleichung der Vorstellungen von bestimmten Größen im Raume zum Gegenstande hat. Sie ruht auf einer ursprünglichen Fähigkeit unsers Bewußtseyns, sich solche Vorstellungen selbstthätig in der Anschauung ausbilden, oder imaginiren zu können, und kommt dadurch zu Stande, daß sie diese Fähigkeit in Anspruch nimmt, und die Bedingungen ausspricht, denen die Thätigkeit des Bewußtseyns bey der Erzeugung jener Vorstellungen in unmittelbarer Anschauung unterworfen ist.

Es ist Factum des Bewußtseyns, daß sich drey, der Art nach verschiedene, eigenthümliche, räumliche Größenvorstellungen, die der Linie, der Fläche und des körperlichen Raumes erzeugen lassen. Ein bestimmter körperlicher Raum muß und kann nur durch umgrenzende Flächen zu Stande, und durch Vermittlung von Flächen zur vollendeten Anschauung gebracht werden. Eine bestimmte Fläche muß, als enthalten zwischen um-

grenzenden Linien gedacht werden können, und sich durch Vermittlung von Linien in vollständiger Anschauung zur Uebersicht bringen und ausbilden lassen. Eine bestimmte Linie endlich muß durch Grenzpuncte bestimmt, und vermittelst eines Puncts in unmittelbarer Anschauung hervorgerufen oder aufgefaßt werden können. Der Punct, mit dessen Setzen alles Construiren anhebt, hat selbst keine Größe.

Die Natur der räumlichen Größen macht in Beziehung auf die wissenschaftliche Entwicklung ihrer Vorstellungen eine Unterscheidung nöthig, wodurch die Geometrie in zwey Abschnitte, Elementargeometrie und höhere Geometrie zerfällt. Es gibt unter allen Linien eine der einfachsten Art, die gerade Linie; unter allen Flächen ebenso eine der einfachsten Art, die ebene Fläche. Alle Constructionen, bey denen nur gerade Linien und ebene Flächen erzeugt und mit einander verbunden werden, gehören ins Gebiet der Elementargeometrie; alle, bey denen andere Linien, als gerade, andere Flächen als ebene hervortreten, fallen der höheren Geometrie anheim. Man gestattet indessen, wie sich später zeigen wird, von dieser Grenzscheidung eine Ausnahme, in Beziehung auf die Kreislinie.

Die Elementargeometrie zerfällt selbst in zwey Haupttheile. Der erste hat diejenigen Constructionen zum Gegenstande, die in einer ebenen Fläche vollzogen werden können, und heißt ebene Geometrie. Der zweyte bezieht sich auf Constructionen, bey denen ein Heraustreten aus ebenen Flächen vor sich geht, und pflegt Stereometrie genannt zu werden.

Erster Abschnitt.

Die ebene Geometrie.

Erstes Capitel.

Grundlage der ebenen Geometrie.

Die Geometrie, als Wissenschaft des Construirens im Raume, hat die Erzeugung zusammengesetzter Constructionen aus einfachen zum Gegenstande. Sie muß also damit anheben, daß sie diejenigen Constructionen, welche, als einfach, und daher keiner weiteren Ableitung durch Zurückführung auf andere fähig, die Basis aller ihrer Operationen ausmachen, und die Principien ihrer Verknüpfung aufstellt.

Die Grundconstructionen entziehn sich ihrer Natur nach jeder wissenschaftlichen Deduction. Ihre Erzeugung kann nur in einem ursprünglichen Acte der construirenden Phantasie (als Postulat) nachgewiesen werden; ihr Wesen läßt sich nur durch Aussprechen der Bedingungen, an welche sich das Bewußtseyn bey dem

Entstehn ihrer Vorstellung gebunden fühlt (durch Axiome) angeben. Das Feld der eigentlich wissenschaftlichen Untersuchungen eröffnet sich erst da, wo es darauf ankommt, aus jenen Grundconstructionen zusammengesetzte Formen zu erzeugen, indem es alsdann gestattet ist, die Regeln, nach, und die Bedingungen, unter denen solche Verbindungen möglich sind, auf bestimmte Begriffe zu bringen.

Ungeachtet aber jene Grundconstructionen und die Principien ihrer Verknüpfung nicht weiter abgeleitet werden können, ist es dennoch für die Wissenschaft durchaus nothwendig, sie zum Gegenstande der ersten Fundamentalbetrachtungen zu machen, indem man sie würklich im Bewußtseyn hervorruft, und die Bedingungen, welche sich dabey als nothwendig offenbaren, bestimmt auszusprechen bestrebt ist.

I. Die gerade Linie.

1. Die gerade Linie ist die erste und einfachste aller geometrischen Constructionen. Ihre Erzeugung hebt mit dem Setzen eines Anfangspuncts an, bleibt indessen unbestimmt, und auf unendlich viele Arten möglich, so lange nichts als ein solcher Anfangspunct gegeben ist. Sobald hingegen noch ein zweyter Punct als Endpunct gleichfalls gesetzt wird, hört jede Unbestimmtheit der Construction gänzlich auf. Wo auch im Raume zwey Puncte als Grenzen einer geraden Linie gegeben seyn mögen, es wird jedesmal zwischen ihnen eine, aber auch nur eine einzige gerade Linie, möglich seyn. Die Raumbeschreibung, vermöge deren die Construction einer geraden Linie von ihrem Anfangspuncte zum

Endpuncte fortschreitet, wird progressive Bewegung eines Puncts genannt. Sind zwey Grenzpuncte für eine gerade Linie gegeben, so kann sie beliebig von dem einen zu dem andern, also auf zweyfache Art, beschrieben werden. Geschieht erst das Eine, und dann das Andere, so wird sie durch Beydes zusammen aufgehoben.

2. Das Wort Richtung bezeichnet den als nothwendig erscheinenden Gang, welchen die Construction einer geraden Linie in ihrem ganzen Verlaufe zu nehmen hat, sobald sie von einem bestimmten Anfangspuncte zu einem gegebenen Endpuncte fortschreiten soll. Die Richtung einer geraden Linie ist durchaus immer dieselbe, jeder Theil der geraden Linie selbst ihr unmittelbarer Ausdruck.

3. Jede gerade Linie hat eine willkührliche Größe, und kann über ihre beyden Grenzpuncte hinaus beliebig fortgesetzt, oder verlängert werden. Aber bey einer solchen Verlängerung dauert die Nothwendigkeit im Gange der Construction, welche durch das Setzen ihrer anfänglichen Grenzpuncte entstanden war, unbedingt fort, und nur die Größe dieser Verlängerung bleibt beliebiger Bestimmung überlassen. Die Richtung einer geraden Linie und ihrer Verlängerung ist durch jeden noch so kleinen Theil derselben vollkommen bestimmt, und nur eine einzige, während ihre Größe keine andre als willkührliche Grenzen anerkennt.

4. Die Länge ist das einzige Quantitative in der Vorstellung einer geraden Linie, oder die einzige Dimension derselben; zwey gerade Linien von gleicher

Länge sind identisch oder congruent, d. h. die eine kann im Raume an die Stelle der anderen gesetzt werden, ohne daß daraus für die Anschauung der mindeste Unterschied erwächst. Dieses kann auf zweyfache Weise geschehn, indem sich dabey Anfangs- und End-Punct der einen verwechseln lassen, wenn sie mit der anderen als zusammenfallend dargestellt werden soll.

II. Die ebene Fläche.

1. Durch eine gerade Linie lassen sich unzählig viele ebene Flächen legen; sobald aber eine solche zugleich durch irgend einen, nicht in der Richtung jener Linie liegenden Punct geführt werden soll, kann dieses nur auf eine einzige, unabänderlich bestimmte Weise geschehn.

2. Das characteristische Merkmal der ebenen Fläche ist: daß jede gerade Linie, welche zwey in ihr liegende Puncte verbindet, mit allen übrigen Puncten gleichfalls in der Fläche enthalten ist.

Wenn die Umfänge, wodurch zwey ebene Flächen umgrenzt werden, zum Zusammenfallen gebracht werden können, so fallen die Flächen selbst, mit allen in ihnen enthaltenen Puncten, völlig in eine zusammen.

3. Der möglichen Verlängerung jeder in einer Ebene liegenden geraden Linie correspondirt eine mögliche Erweiterung der Ebene selbst, welche nur auf eine einzige, durch die bereits vorhandene Ebene vorgeschriebene Weise, abgesehn von der ihr zu ertheilenden Begrenzung, geschehn kann.

4. Jede in einer Ebene gezogene Linie erhält, in Beziehung auf die Ebene, zwey Seiten, und jeder Punct einer Ebene, der nicht in der Richtung einer in ihr gezogenen geraden Linie selbst liegt, fällt entweder auf die eine oder die andere Seite derselben. Jede andere Linie, die zwey, auf verschiedenen Seiten von ihr liegende Puncte verbinden soll, muß sich mit ihr kreuzen. Ist jene andere gleichfalls eine gerade Linie, so wird sie dadurch selbst in zwey Stücke zerfallen, von denen jedes ganz auf derselben Seite liegt, auf welcher sich sein angenommener Grenzpunct befindet, da zwey gerade Linien nur einen Punct gemein haben können.

5. Jede Construction, die von beliebigen Puncten einer geraden Linie aus, in einer ebenen Fläche, auf der einen Seite der Linie, gemacht ist, läßt sich mit völliger Congruenz auf der anderen Seite derselben wiederholen.

III. Der Winkel zweyer geraden Linien, und der Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln.

1. Wenn in einer ebenen Fläche, von demselben Puncte aus, zwey gerade Linien gezogen sind, so ist dadurch in der That eine Verbindung zweyer Grundconstructionen gestiftet. Soll aber der Uebergang aus der einen in die andere geschehn, und der Unterschied ihrer Richtungen in der Anschauung aufgefaßt werden, so wird dazu eine, nicht weiter zurückführbare, Raumbeschreibung oder Bewegung, welche die drehende genannt zu werden pflegt, erfordert, die in sofern berechtigt ist, den Namen einer Grundconstruction zu führen.

Ein Winkel besteht in dem durch drehende Bewegung aufgefaßten Unterschiede zweyer Richtungen, und seine Größe hängt von dem geringeren oder grösseren Fortschreiten der zu seiner Erzeugung erforderlichen drehenden Bewegung ab. Da Ausdruck einer bestimmten Richtung oder gerade Linie gleichbedeutend sind, so gehören zu jedem Winkel, als Grundlage seiner Erzeugung, in der Regel zwey gerade Linien, deren Länge aber gleichgültig ist, die Schenkel des Winkels, ausgehend von einem gemeinschaftlichen Puncte, dem Scheitelpuncte. So sind (fig. 1.) AB und BC die Schenkel des Winkels ABC, der seinen Scheitelpunct in B hat. Es ist eine unmittelbare Folgerung aus dieser Erklärung, daß krumme Linien (problematisch als möglich angenommen), indem ihr Zug selbst in seinen kleinsten Theilen niemals eine bestimmte Richtung unmittelbar ausdrückt, unfähig sind, die Schenkel eines Winkels abzugeben. Jeder Winkel läßt sich auf zwey Arten beschreiben, die, erst die eine und dann die andere vollzogen, ihn aufheben.

2. Die drehende Bewegung, welche die, aus dem nemlichen Puncte möglichen, verschiedenen Richtungen in einer stetigen Reihe erzeugt, kann nicht, wie die progressive, ins Unendliche fortgesetzt werden, so daß sie stets zu neuen, von den schon durchlaufenen verschiedenen Richtungen führte, so wie die progressive zu immer anderen, noch nicht durchlaufenen, Puncten weiter bringt. Man kann sie, von jeder beliebigen ersten Direction aus, bis zur gänzlichen Umdrehung fortschreiten lassen, und alsdann sind, indem man in die anfängliche Richtung zurückgekommen, alle möglichen ver-

schiedenen Richtungen, die vom Scheitelpuncte aus genommen werden können, vollständig beschrieben. Demgemäß gibt die ganze Umdrehung den größten, an einem Scheitelpuncte möglichen Winkel, dessen Theile als außer und neben einander im Raume liegend erscheinen. Bey ihm fällt der letzte Schenkel mit dem ersten zusammen.

3. Zur genaueren Classification der Winkel unterscheidet man noch einige Momente in der ganzen Umdrehung. Ist der erste Schenkel, wie AB (fig. 2.) gegeben, so kann man ihn rückwärts vom Scheitelpuncte verlängern, wie AB nach AC. Nun führt offenbar sowohl die Drehung aus AB in AC, als die von AC in demselben Sinne weiter fortgesetzte, und bis zum anfänglichen AB zurückkehrende, aus einer gegebenen Richtung in die umgekehrte. Beyde sind also gleich, und da sie zusammen die ganze Umdrehung ausmachen, so ist jede die Hälfte der letzteren. Man darf also behaupten, daß der drehende Fortschritt aus einer gegebenen Richtung in die, durch sie selbst bestimmte, umgekehrte, eine halbe Umdrehung erfordere. Der dadurch beschriebene Winkel pflegt auch wohl ein gerader Winkel genannt zu werden. Alle Winkel, zu deren Erzeugung weniger als eine halbe Umdrehung nöthig ist, heißen hohle, oder auswärtsgehende; diejenigen hingegen, welche, um beschrieben zu werden, mehr als eine halbe Umdrehung erfordern, werden überstumpfe, oder einwärtsgehende Winkel genannt.

Da sich die Geometrie am meisten mit den hohlen Winkeln zu beschäftigen hat, so ist man in ihrer Clas-

ssification noch weiter fortgeschritten. Jeder hohle Winkel wird einen zweyten mit sich führen, der ihn zu einer vollen halben Umdrehung ergänzt. Beyde werden in Beziehung auf einander Nebenwinkel genannt. Man braucht diesem gemäß nur den einen Schenkel eines gegebenen hohlen Winkels, wie AB als Schenkel des Winkels DAB (fig. 2.) rückwärts zu verlängern, und diese Verlängerung, AC, wird mit dem andern Schenkel des gegebenen, AD, dessen Nebenwinkel, DAC, darbieten.

Die Hälfte des geraden Winkels, oder der vierte Theil einer Umdrehung wird ein rechter Winkel genannt, und darf als möglich ohne weiteres angenommen werden; wenn schon die Regel der bestimmten Construction für sie erst später abgeleitet werden kann. So lange der hohle Winkel kleiner ist als ein rechter, heißt er spitz, sobald er größer wird als ein rechter, bekommt er die Benennung eines stumpfen. Statt gerader Winkel pflegt man gewöhnlich zwey rechte, statt des durch eine ganze Umdrehung erzeugten, vier rechte zu sagen. In diesem Sinne versteht es sich also von selbst, daß alle in einem Punct herum neben einander liegenden Winkel beständig zusammen vier rechte betragen.

4. Die Schenkel jedes Winkels können beyde rückwärts verlängert werden, und diese beyden Verlängerungen bilden selbst einen Winkel mit einander, welcher Scheitelwinkel des gegebenen heißt. Zwey solche Scheitelwinkel wie (fig. 3.) ABC und EBD werden offenbar durch einen dritten, CBD, getrennt, der mit jedem von ihnen einen Schenkel gemein hat, während sein zweyter die Verlängerung ihres andern Schenkels

ist. Dieser also ist Nebenwinkel des ersten sowohl, als des andern, macht folglich mit jedem von ihnen die nemliche Summe, und daher müssen sie selbst einander gleich seyn.

5. Der Winkel als einfache Grundconstruction, hat nur ein Moment: Unterschied der Richtung. Wenn also an zwey verschiedenen Stellen Winkel gleicher Größe verzeichnet, von der etwaigen Länge ihrer Schenkel, worauf man bey der Vorstellung des Winkels selbst keine Rücksicht nimmt, abstrahirt, so sind beyde Constructionen identisch. Dies drückt man gewöhnlich so aus: Winkel von gleicher Größe sind congruent, oder decken einander. Dieses kann auf zweyfache Art geschehn. Deckt ein Winkel einen anderen, so wird er es gleichfalls thun, wenn man seine Schenkel in umgekehrter Ordnung mit denen des anderen zusammenfallen läßt.

6. Eine drehende Bewegung, die von einer bestimmten ersten Richtung ausgeht, kann jedesmal nach der einen oder der anderen von den beyden Seiten, die diese in der ebenen Fläche stiftet, in welcher sie liegt, geschehn.

7. Mit dem Winkel zugleich, obschon nicht allemal bey seiner Construction beachtet, erzeugt sich der Kreisbogen. Wenn man von einem Puncte C (fig. 4.) eine ursprüngliche Richtung nimmt, um von ihr aus drehend zu anderen Richtungen fortzuschreiten, so gibt man der Linie, welche die erste Richtung darstellt, unfehlbar eine bestimmte Länge, und behält dieselbe am

natürlichsten auch während der Drehung ungeändert bey. Alsdann beschreibt jeder Punct der gedrehten Linie, namentlich ihr Endpunct, A, einen bestimmten, zwischen den Schenkeln des Winkels begrenzten Zug, welcher ein Kreisbogen genannt wird. Die drehende Bewegung läuft zuletzt in sich selbst zurück; der Kreisbogen wird alsdann zu einem zusammenhängenden, in sich selbst zurückkehrenden Zuge, welcher Umfang (Peripherie) des Kreises genannt wird. Die um ihren Anfangspunct gedrehte Linie heißt Halbmesser (Radius des Kreises); jener Anfangspunct, weil alle Puncte der Peripherie gleichviel von ihm abstehn müssen, Mittelpunct des Kreises; jede gerade Linie, die zwey Puncte der Peripherie verbindet, Sehne; wenn sie durch das Centrum geht, Durchmesser. Durch Mittelpunct und Radius ist die Construction des Kreises völlig gegeben. In der Elementargeometrie, streng genommen, soll der Kreis eigentlich nur als Möglichkeit, gerade Linien, die von einem Puncte aus nach verschiedenen Richtungen gehn, gleich zu machen, und als Begleiter der Winkelbeschreibung auftreten; es ist Ausnahme von der Regel, wenn auch die inneren Eigenschaften dieses Zuges der besonderen Betrachtung unterworfen werden.

IV. Beziehung zweyer Richtungen gegen einander.

1. Auch die Richtungen zweyer Linien, die getrennt von einander in einer ebenen Fläche liegen, stehen zu einander in einer bestimmten Beziehung, welche erkannt werden kann, wenn man beyde mit einer dritten durchschneidet, wie CA und DB mit ABE (fig. 5.) und

die beyden Winkel, welche sie mit dieser dritten, auf der nemlichen Seite von ihr, mittelst einstimmiger drehender Bewegung beschrieben, bilden, CAB und DBE, mit einander vergleicht. Sind diese Winkel identisch, so heißen jene Linien gleichgerichtet, im gegentheiligen Falle werden sie verschieden gerichtet genannt, und ihre gegenseitige Lage erscheint uns im ersten Falle von anderer Art als im zweyten.

2. Man mag die Anschauung der in jedem Puncte einer geraden Linie identischen Richtung derselben anheben, in welchem dieser Puncte man will, so ist es nicht möglich, daß diese identische Richtung das eine Mal als verschieden, das andere Mal als nicht verschieden von einer zweyten, aus einem bestimmten Puncte neben ihr unwandelbar genommenen Richtung, erscheinen kann. Ist also die Richtung der Linie AC, angehoben in A, als nicht verschieden von der Richtung der neben ihr von B ausgehenden Linie BD erkannt, weil beyde sich gegen die Richtung der dritten ihre Anfangspuncte verbindenden AB, auf derselben Seite von ihr, unter gleichen einstimmigen Winkeln CAB, DBE neigen, so kann die nemliche Richtung, angehoben in C, nicht verschieden von der vorigen zweyten BD erscheinen, mithin, wenn ihre jetzigen Anfangspuncte durch CB verbunden werden, ihre einstimmigen Neigungen gegen die Richtung derselben, d. h. die Winkel FCB und DBG nicht verschieden seyn. Zwey gleichgerichtete Linien bilden also mit jeder dritten, die aus einem Puncte der ersten zu der anderen geht, auf derselben Seite von ihr fortgeführt, gleiche einstimmige Winkel.

V. Begriff der ebenen Figur, und seine allgemeinen Bedingungen.

1. Eine einfach begrenzte, ebene Figur heißt jeder Theil einer ebenen Fläche, welcher in ihr durch einen zusammenhängenden, in seinem Fortgange stets durch verschiedene Puncte gehenden, und zuletzt auf seinen Anfangspunct zurückkehrenden Linienzug umgrenzt wird *).

2. Wenn in einer ebenen Fläche eine Figur gebildet ist, so liegt jeder Punct der Fläche entweder in dem Umfange der Figur, oder in ihr, oder außer ihr.

Liegt ein Punct in einer Figur, so muß jede Richtung, die von ihm aus beliebig genommen werden mag, den Umfang der Figur erreichen, um auf dessen andere Seite gelangen zu können, und umgekehrt. Daraus folgt, daß jede gerade Linie, die durch einen Punct im Inneren einer Figur geht, nothwendig, genugsam verlängert, ihn zwey Mal durchkreuzen muß. Liegt ein Punct außerhalb einer Figur, so muß es auf irgend eine Art möglich seyn, von ihm aus in einem zusammenhängenden Zuge fortzuschreiten, ohne dem Umfange der Figur zu begegnen, und umgekehrt.

VI. Figuren der Elementargeometrie.

1. Unter allen möglichen Figuren ist in Absicht auf ihre Erzeugung die des Kreises, welche jeder beliebige

*) Man pflegt dieses unter dem Ausdrucke Figur schlechthin zu verstehn. Es gibt aber auch mehrfach begrenzte Figuren, deren Flächen als Differenzen von den Flächen einfach begrenzter angesehn werden können.

Grenzpunct einer sich um ihren Anfangspunct drehenden Linie beschreibt, die einfachste. Jeder Punct, dessen Abstand vom Mittelpuncte kleiner ist als die Radiusweite, liegt im Innern, jeder Punct, der um mehr als die Radiusweite vom Mittelpuncte entfernt ist, liegt außerhalb des Kreises.

2. Die Absicht des ersten Hauptabschnittes der Elementargeometrie, ist die Bildung von Zügen, die aus geraden Linien zusammengesetzt sind; die Bestimmung der Bedingungen, unter denen sie den Umfang einer einfachen Figur darstellen können; und die Erforschung der gegenseitigen Abhängigkeit, in welcher sich alsdann ihre Grundbestandtheile befinden müssen.

3. Eine gerade Linie gibt nie den Umfang einer Figur, weil sie nicht in sich selbst zurückläuft. Ebenso wenig thun dieses zwey gerade Linien. Hat die Richtung der einen keinen Punct mit der anderen gemein, so stellt keine von ihnen für sich oder in Verbindung mit der anderen einen zusammenhängenden und geschlossenen Zug dar. Gibt es für sie einen gemeinschaftlichen Punct, so kann man, von ihm aus in der Richtung der einen fortschreitend, nicht zu einem Puncte der andern, also nicht in diese, mithin überall nicht zu jenem gemeinschaftlichen zurück gelangen, da, der Natur der geraden Linie gemäß, eine solche mit einer anderen nur einen Punct gemein haben kann.

Ein aus drey geraden Linien gebildeter Umfang ist also, sofern seine Möglichkeit nachgewiesen werden kann, der einfachste, überhaupt aus geraden Linien

mögliche, mithin der erste Gegenstand der Elementar-geometrie.

Zweytes Capitel.

Theorie der Dreyecksconstruction.

Die Möglichkeit, aus drey verschiedenen geraden Linien einen Zug zu bilden, ist von selbst klar; auf gleiche Weise auch die, ihn in sich selbst zurücklaufend zu machen. Denn man kann aus jedem Puncte zwey gerade Linien ziehn, und ihre Endpuncte durch eine dritte, die alsdann von der einen wie der anderen verschieden werden muß, verbinden. So entsteht das ebene geradlinigte Dreyeck.

Sein Umfang erhält als Grundbestandtheile drey gerade Linien oder Seiten, und drey Winkel, deren jeder durch zwey Seiten (die ihm anliegen) gebildet, und durch die dritte (ihm gegenüberstehende, oder seine Gegenseite), abgeschlossen wird. Der Nebenwinkel von einem solchen pflegt ein äußerer Dreyeckswinkel genannt zu werden.

Die eigentliche Theorie der Dreyecksconstruction hat zu untersuchen, ob und in wie fern unter den Grundbestandtheilen oder Stücken eines Dreyeckumfangs gegenseitige Verbindung und Abhängigkeit statt findet. Der würkliche Versuch des Construirens, indem man solche Stücke einzeln annimmt, sie zu dem verlangten Zuge zu verbinden strebt, und genau unterscheidet, ob dabey die Freyheit der Construction fortdauert, oder ob und wie weit die zu ihrer Vollendung noch erforderli-

chen Stücke durch die früher gesetzten bereits vorgeschrieben sind, kann darüber allein entscheiden.

I. Verbindung unter den Winkeln eines Dreyecks.

Aus den Principien über die gegenseitige Beziehung zweyer Richtungen läßt sich sofort eine sehr bestimmte Abhängigkeit der Winkel eines Dreyecks von einander ableiten.

1. Zwey Seiten eines Dreyecks können nicht gleichgerichtet seyn, weil solche Linien nicht fähig sind zusammenzustoßen. Sind (fig. 6.) BD und AC, unter gleichen Winkeln CAB und DBH gegen AB geneigt, so sind es ihre rückwärts gemachten Verlängerungen AE und BF, wegen Gleichheit der Scheitelwinkel, CAB = GAE, und DBH = ABF gegen dieselbe AB, unter den nemlichen Winkeln auch; die Constructionen über und unter AB sind congruent; wenn also AC und BD oberwärts hin zusammenstoßen sollten, so müßte das Gleiche mit AE und BF niederwärts geschehn; dann würden also zwey Richtungen in zwey verschiedenen Puncten zusammenstoßen, welches unmöglich ist. Solche gleichgerichtete Linien sind also parallele; d. h. nach keiner Seite zusammenstoßende, während zwey Seiten eines Dreyecks allemal als fähig, vorwärts gerichtet zusammenzutreffen (convergirend), aber unfähig, dieses in umgekehrter Richtung zu thun (divergirend) erscheinen müssen.

2. Sind in den Endpuncten der gegebenen AB zuerst gleichgerichtete Linien aufgestellt gewesen, und soll

die eine, AC, ihre Lage nicht ändern, so muß die andere, BD, sich also einwärts gegen sie, in die Lage BC, drehen, wenn mit ihr und jener über CB ein Dreyeck zu Stande kommen soll, mithin muß sie einen größeren Winkel, CBH, mit der Richtung AB bilden als vorher, wo dieser Winkel DBH, und dem mit der ersten AB gebildeten, d. h. CAB, gleich war. Der Winkel CBH ist ein äußerer Winkel des entstandenen Dreyecks, der Winkel CAB ein innerer, diesem äußeren entgegengesetzter, der Dreyecksseite, welche mit der Verlängerung einer anderen den äußeren Winkel bildet, gegenüberstehender. Dieser äußere ist also allemal größer als jener innere.

3. Die beyden inneren Winkel eines Dreyecks, die nicht mit dem äußeren an gleichem Scheitelpuncte liegen, betragen zusammen so viel als er selbst. Sind, wie anfangs, AC und BD gleichgerichtet, weil die Winkel CAB und DBH gleich seyn sollen, so müssen sie auch (S. 198, 2.) gleiche einstimmige Winkel mit der sie verbindenden Linie BC bilden, also KCL = DBC seyn. Nun kann für KCL sein Scheitelwinkel ACB gesetzt werden. DBC ist CBH — DBH, man erhält also, da DBH und CAB gleich seyn sollen, ACB = CBH — DBH, mithin ACB + CAB = CBH.

4. Die drey Winkel des Dreyecks betragen so viel als zwey rechte. Der äußere Winkel, und derjenige innere, welcher mit ihm an demselben Scheitelpuncte liegt, als Nebenwinkel, geben diese Summe von selbst. Wenn also die beyden anderen inneren Winkel des Dreyecks zusammen so viel als dieser äußere betragen, so

geben sie und jener dritte innere Winkel gleichfalls zusammen die Summe von zwey rechten.

5. Man darf also behaupten, daß durch zwey Winkel eines Dreyecks der dritte unabänderlich bestimmt ist, und daß zwey Dreyeckswinkel niemals zusammen so viel als zwey rechte, oder gar noch mehr, sondern im Gegentheile stets weniger als diese Summe austragen. Aus diesem Grunde kann ein Dreyeck (das rechtwinklichte) nur einen rechten Winkel, und neben demselben noch zwey, deren jeder spitz ist; auf gleiche Art kann es (das stumpfwinklichte) nur einen stumpfen neben zwey spitzen enthalten; sollen zwey einander gleiche Winkel in einem Dreyecke liegen, so müssen beyde spitze Winkel seyn.

II. Construction des Dreyecks aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Will man Seiten und Winkel zu einem Dreyecksumfange verbinden, so bietet sich, als die einfachste unter allen, die Construction des Dreyecks aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel dar. Sie ist unter gänzlicher Unabhängigkeit und unbeschränkter Wahl dieser drey Größen, also unbedingt, möglich; sie vollendet sich, sobald auf den Schenkeln des angenommenen Winkels die geforderten Längen der Schenkel dargestellt sind, durch das Ziehn einer geraden Linie zwischen den Endpuncten derselben, wodurch die dritte Seite, sowohl der Größe als der Lage nach, mithin auch die Winkel, welche sie mit den beyden anderen bildet, vollkommen bestimmt werden. Man könnte allerdings, sobald jene

Längen verschieden sind, sie auf zweyfache Art auf den Schenkelrichtungen des gegebenen Winkels abschneiden. Da aber gleiche Winkel, auch umgewendet, sich congruent bleiben, so werden Dreyecke, wenn sie den nemlichen Winkel besitzen, und nur dadurch verschieden sind, daß sich in ihnen die Längen seiner Schenkel verwechselt haben, umgewendet mit jenen Winkeln, unter sich gleichfalls congruiren müssen. Sollen die Schenkel gleich lang seyn, so gibt es nur eine Art, das Dreyeck zu construiren; es wird sich decken, wenn es mit seinem Winkel an der Spitze umgewendet wird; es müssen also in einem gleichschenklichten Dreyecke die den gleichen Schenkeln gegenüberstehenden Winkel gleiche Größe besitzen.

Schon dieser erste Satz ist ein fruchtbares Princip für weitere Untersuchungen. Man kann die Gleichheit zweyer geraden Linien, oder zweyer Winkel beweisen, sobald sich Dreyecke construiren lassen, die in Absicht auf zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel identisch sind, und in denen die als gleich zu erkennenden Linien die dritten Seiten darstellen, oder jene als gleich nachzuweisenden Winkel, der eine im ersten, der andere im zweyten Dreyeck liegend, zusammenfallen müßten, wenn die Dreyecke zur Congruenz gebracht würden.

Es mag sofort an diesem ersten Falle der Dreyecksconstruction die Methode versinnlicht und ausgeübt werden, welche den Hauptschlüssel für die Erkenntniß der Gesetzmäßigkeit zusammengesetzter Größen abgibt.

Wenn nemlich eine solche Größe durch Verknüpfung von Grundbestandtheilen erzeugt wird, deren einige unabhängig von sich und den übrigen sind, und in sofern ursprüngliche zu heißen pflegen, während die an-

dern durch sie bestimmt und mittelbar hervorgerufen, und alsdann abhängige genannt werden, so muß man allmälig jedem jener ursprünglichen Bestandtheile eine beliebige Aenderung geben, und erforschen, welche Aenderungen dadurch in den gleichzeitigen Zuständen der abhängigen Bestandtheile nothwendig werden. Nur auf diese Art läßt sich eine allgemeine Kenntniß zusammengesetzter Größen, und aller Zustände, deren sie fähig sind, erwerben.

Um also, da die Construction aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel jederzeit möglich und vollkommen bestimmend für die drey übrigen abhängigen Stücke des Umfangs ist, den eigentlichen Gang derselben, und den Zusammenhang der verschiedenen Gestalten, die ein aus ihr hervortretendes Dreyeck anzunehmen vermag, zu erkennen, soll der Einfluß, welchen die beliebige Aenderung von einem jener drey ursprünglich angenommenen Grundbestandtheile auf die drey übrigen, von ihnen abhängenden und durch sie bestimmten Stücke des Dreyecksumfanges und deren gleichzeitige Aenderungen haben muß, in der Construction verfolgt werden.

A. Es ändere sich bey der Construction des Dreyecks aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bloß die eine Seite. Man fragt nach den gleichzeitigen Aenderungen der beyden anderen Winkel und der dritten Seite.

a. Die erste Frage trifft die beyden anderen Winkel des Dreyecks.

Hier ist sofort klar, daß, sobald (fig. 7.) der eine Schenkel, CB, des unabänderlichen Winkels C, sich verlängert, sein Endpunct D über die bisherige Basis AB hinaus, also jenseits derselben gerückt wird, mithin eine Linie AD, die aus dem Anfangspuncte der Basis, A, zu ihm gezogen wird, jenseits dieser Basis fallen, folglich mit dem diesseits von ihr gelegenen oberen Schenkel des Winkels C, einen größeren Winkel CAD, als der anfängliche CAB bilden muß.

1. Mithin hat das Wachsen des unteren Schenkels ein gleichzeitiges Zunehmen; das Abnehmen jenes Schenkels also eine gleichzeitige Verringerung des ihm gegenüberstehenden Winkels zur nothwendigen Folge.

Wenn aber der erste Winkel eines Dreyecks unwandelbar ist, der zweyte hingegen sich ändert, so muß auch der dritte eine Aenderung leiden, und diese muß sich, weil alle drey zusammen zwey rechte austragen, mit der des zweyten compensiren, mithin derselben der Größe nach gleich, in Absicht auf die Beziehung aber widerstreitend seyn.

2. Ist also durch das Zunehmen der Seite CB, ihr Gegenwinkel gewachsen um BAD, so darf man nicht allein behaupten, daß der dritte Winkel des Dreyecks, vorher CBA, jetzt D, kleiner geworden sey, sondern, daß seine Abnahme genau so viel als die Zunahme des zweyten, d. h. so viel als BAD betrage.

3. Es verdient hier als genauere Bestimmung bemerkt zu werden, daß jedesmal, wenn man die Verlängerung des unteren Schenkels so groß als die Basis

des zuletzt vorhanden gewesenen Dreyecks, also BD = AB macht (weil alsdann die Winkel BAD und D identisch sind), die allgemeine Beziehung CBA — D = BAD, in die Gestalt CBA — D = D, oder CBA = 2D, oder ½ CBA = D übergeht, mithin der am Endpuncte des verlängerten Schenkels entstehende dritte Winkel des Dreyecks nur noch halb so groß wird, als er es vorher war. Es kann also dieser Winkel im Fortgange der Construction unter jede bestimmte, noch so geringe, Kleinheit herabsinken. Denn es lassen sich ähnliche Verlängerungen des untern Schenkels, deren jede ein neues Dreyeck hervorruft, so viele als man will, nach Belieben wiederholen, und stetige Halbirungen vermögen eine Größe unter jede beliebige Kleinheit herabzudrücken *).

4. Der Gegenwinkel der veränderlichen Seite kann also, wenn sie fortfährt zu wachsen, dem Werthe, Nebenwinkel des unabänderlich gedachten Winkels C zu seyn, so nahe kommen, daß er sich davon um weniger als eine beliebig gewählte Kleinheit unterscheidet.

Daraus folgt, daß der nemliche Winkel sich im Verlauf der Construction als eine continuirliche Größe fortbildet, so daß kein Werth zwischen O und 2R — C ist, den er nicht bey dem Fortgange seiner Gegenseite von O bis in beliebige Weite anzunehmen fähig wäre.

*) n mal halbiren heißt durch 2^n dividiren, und 2^n ist, sobald n über 1 hinausgeht, stets größer als n, mithin $\frac{B}{2^n}$ kleiner als $\frac{B}{n}$.

Denn sobald am Scheitelpunct, A, durch Wachsen der Gegenseite CB, ein größerer Winkel, CAD, entstehen kann, als ein gegebener, der um ein Bestimmtes geringer ist als 2R — C, kann man den letzteren als einen Theil von CAD am Scheitelpuncte A, darstellen, und eine Linie, welche den Winkel CAD theilt, wie AB, muß nothwendig seiner Gegenseite begegnen, und von ihr ein bestimmtes Stück CB abschneiden. Als folglich früher die continuirlich wachsende Gegenseite den Werth CB gehabt, ist jener gegebene Winkel ihr gegenüber unfehlbar hervorgetreten.

5. Erlangt der Gegenwinkel der wachsenden Seite allmälig und continuirlich alle Werthe zwischen 0 bis 2R — C, so muß gleichzeitig der dritte anliegende Winkel continuirlich alle Werthe zwischen 2R — C und 0 erhalten.

6. Ueber die Größenverhältnisse beyder Winkel, sofern sie von den Verhältnissen der ihnen gegenüberstehenden Schenkel abhängen, ergibt die Betrachtung der Construction sogleich Nachfolgendes:

Läßt man die erste Form des Dreyecks die gleichschenklichte CA = CB seyn, so sind die Winkel an seiner Basis gleich. Wächst nur der eine Schenkel, so wird der Winkel ihm gegenüber, CAD, größer als vorhin, während der andere, der dem ungeändert gebliebenen Schenkel CA entgegensteht, kleiner als vorhin werden muß. Es beträgt also dieser vergrößerte Winkel GAD unfehlbar mehr als jener verkleinerte, D. Es muß also in jedem Dreyecke der Seite, die größer ist als eine andere, ein größerer Winkel als dieser an-

deren gegenüberliegen. Daraus, verbunden mit dem Satze, daß gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberstehn, folgt von selbst, daß auch umgekehrt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt.

7. Wäre das anfängliche Dreyeck CAB nicht gleichschenklicht, sondern irgend ein beliebiges gewesen, so würde wenigstens in dem Falle, wo das Wachsen des einen Schenkels, BD, soviel als die Basis AB des anfänglichen Dreyecks beträgt, der Winkel ihm gegenüber, CAD = CAB + BAD, größer als der dem anderen Schenkel entgegenstehende, D = BAD, seyn, mithin die Gegenseite des ersten CD = CB + BD = CB + AB größer als die des anderen CA. Zwey Seiten eines Dreyecks betragen also jederzeit mehr als die dritte.

b. Ueber die Zustände, welche die dritte Seite eines Dreyecks erhält, wenn sich in ihm die Länge des einen Schenkels von einem unwandelbaren Winkel verändert, ergibt sich Folgendes, wobey zunächst der unwandelbare Winkel C (fig. 8.) als ein spitzer gedacht wird.

1. Da der Winkel, dem wandelbaren Schenkel gegenüber, alle Werthe zwischen den Grenzen 0 und 2R — C mit Continuität durchläuft, während dieser Schenkel sich stetig von 0 an fortbildet, also auch alle, wobey er geringer ist als R — C, wo denn der dritte Winkel seines Dreyecks jedesmal mehr als R auszumachen hat; so muß eine erste Reihe von Dreyecksformen CAB, CAD u. s. w. entstehn, welche an der Ecke, die der Endpunct des wandelbaren Schenkels

firirt, B, D u. s. w. einen stumpfen Winkel enthalten. So lange dieses der Fall ist und bis endlich an der genannten Ecke ein rechter Winkel, E, entsteht, welches im Fortgange der Construction nothwendig geschehn muß, aber nur ein Mal möglich ist, wird die dritte schließende Seite des Dreyecks jederzeit kürzer als der unwandelbare Schenkel, jeder folgende Zustand derselben wird kleiner als der vorhergehende, sie ist mithin im fortwährenden Abnehmen begriffen. Denn da der Annahme zufolge die Dreyecke CAB, CAD, ABD, bey B und D stumpfe Winkel enthalten, und dem stumpfen Winkel in einem Dreyecke die größte Seite desselben gegenübersteht, so muß AC > AB > AD seyn.

Sobald aber bey weiterem Fortgange der Construction an der vortretenden Ecke, FG (fig. 8.), spitze Winkel entstehn, muß die dritte Seite wieder in beständigem Wachsen begriffen seyn. Denn AE ist kleiner als AF, weil der Winkel bey E ein rechter; AF kleiner als AG, weil der Winkel AFG ein stumpfer Winkel ist.

Sie hat also ihren kleinsten Werth, wenn sie auf der Richtung des unteren Schenkels als Loth auftrifft. Man darf hinzufügen, sie hat gleiche Werthe, wenn sie ihn in gleichen Entfernungen vom Fußpuncte dieses Loths erreicht. Denn sind EF und EB gleich lang, so haben die Dreyecke AEB und AEF beyde den rechten Winkel bey A, und die ihn einschließenden Seiten EB = EF; AE = AE gemein, es müssen also auch ihre dritten Seiten, AB und AF, zusammenfallen.

2. Die dritte schließende Seite erhält mit Continuität jeden Werth zwischen AC und AE während ihres

Abnehmens; jeden, der beträchtlicher ist als AE während ihres Zunehmens, also jeden zwischen AC und AE enthaltenen zwey Mal, aber jeden grösseren als AC nur ein Mal. Denn sey irgend eine Linie grösser als das Loth AE, so kann man sie von A aus in der Richtung dieses Loths AE auftragen = AH, und wenn man alsdann mit ihr als Radius einen Kreis beschreibt, wird der Punct E im Innern desselben liegen, also die durch ihn fortgeführte Richtung CE sich mit der Peripherie dieses Kreises, irgendwo in F, kreuzen, mithin AF = AH das Dreyeck darstellen, dessen schließende Seite AF = AH ist. Jedoch nur in dem Fall, wenn AF = AB kleiner ist als AC, mithin AH = AF = AB kleiner als CA, kann ein solches zweytes Dreyeck entstehn.

Wäre das anfängliche Dreyeck selbst ein rechtwinklichtes, AEG, oder ein stumpfwinklichtes, AFG, gewesen, so würde dessen dritte schließende Seite AF oder AG, immer in einem steten Wachsen begriffen seyn.

3. Ist also die schließende Seite so lang als ein Loth, welches aus dem Endpuncte des gegebenen Schenkels für den angenommenen Winkel auf die Richtung von dessen anderen Schenkel allemal möglich ist, oder länger als der gegebene Schenkel des unabänderlichen Winkels, so kommt unfehlbar, nur ein einziges Mal, ein Dreyeck hervor, welches sie als solche enthält. Ist sie aber länger als das eben genannte Loth und kürzer als jener gegebene Schenkel, so muß der Verlauf der Construction zwey übrigens verschiedene Dreyecksformen hervorrufen, in welchen sie als schließende Seite erscheint.

B. Wenn sich bey der Construction eines Dreyecks aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, bloß dieser Winkel ändert, seine Schenkel aber unwandelbar bleiben, so ist Nachstehendes über die gleichzeitigen Aenderungen der beyden anderen Winkel und der dritten Seite festzusetzen.

a. Wenn die Schenkel des angenommenen Winkels verschiedene Größen sind, so ergibt sich für die übrigen Stücke des Dreyecks Folgendes:

α. Der Gegenwinkel des längern Schenkels folgt nachstehender Regel:

1. Der Gegenwinkel CBA des größeren Schenkels, CA (fig. 9.), muß nothwendig abnehmen, sobald der an der Spitze BCA vergrößert wird. Denn dreht man, damit dieses geschehe, den größeren Schenkel CA auswärts, so kann sein Endpunct, vorher A, jetzt D, die Richtung der Gegenseite BA nicht erreichen, da CA schon unter einem spitzen Winkel bey A in dieselbe trifft und jede, die, jenseits CA liegend, dasselbe thun soll, länger als CA seyn muß. Er liegt also diesseits der Linien BA und BC; mithin fällt die zu ihm aus B gezogene Linie BD zwischen jene beyde, theilt also deren Winkel, und läßt CBD geringer als CBA werden.

2. Der Gegenwinkel des größern Schenkels ändert sich mit Continuität; und kann alle Werthe zwischen 0 und 2R annehmen.

Denn sey (fig. 10.) CBE ein beliebiger Winkel zwischen jenen Grenzen. Da CB kleiner seyn soll als

CA, so liegt B im Innern des Kreises, den bey abnehmendem Winkel C an der Spitze, der Endpunct seines längeren Schenkels CA zum Theil beschreibt. Es ist also der zweyte Schenkel BE jenes beliebigen Winkels CBE eine Linie, die durch einen Punct im Innern dieses Kreises geht; sie muß also, genugsam verlängert, die Peripherie desselben durchkreuzen. Zieht man zu einem Puncte E, wo dieses geschieht, einen Radius CE, so ist das Dreyeck CBE dargestellt, in welchem für einen bestimmten Werth des Winkels an der Spitze ECB, gebildet durch die gegebenen Schenkel, CB und CE = CA, dem längern Schenkel der verlangte Winkel gegenübersteht.

β. Der Gegenwinkel des kürzeren Schenkels erfordert in Absicht auf den Gang seiner Construction eine ursprüngliche Betrachtung, da das Wachsen des Winkels an der Spitze, und das gleichzeitige Abnehmen des Gegenwinkels für den längern Schenkel, über seine simultanen Zustände keine unmittelbare Folgerung zulassen.

1. Man geht hier am bequemsten von dem Falle aus, wo der Gegenwinkel des längern Schenkels, der (α, 2.) jeden Werth zwischen 0 und 2R erhalten kann, selbst ein rechter ist, wie CBA (fig. 11.). Der Werth, welchen alsdann der gegenwärtig in Untersuchung genommene Gegenwinkel des kürzern Schenkels CB erhält, CAB = R — BCA ist der größte, den er im Verlauf der Construction jemals erlangen kann.

Denn da CB, als Loth auf die Richtung BA, kürzer ist als irgend eine andere Linie, die von C aus

zu dieser Richtung gezogen werden könnte, so mag sich jetzt der kürzere Schenkel des Winkels BCA einwärts drehn, um einen kleineren Winkel DCA, oder auswärts, um einen größern KCA zu beschreiben, sein Endpunct D oder K muß immer unter der Richtung AB, die er nur, wenn er länger würde als CB, erreichen könnte, so wie über der des unverrückt angenommenen längern Schenkels CA bleiben, also zwischen beyde fallen, mithin eine aus dem Scheitelpuncte des Winkels CAB, den beyde einschließen, zu ihm gezogene Linie, AD oder AK, diesen Winkel theilen, mithin DAC oder KAC kleiner als ihn ausfallen lassen.

2. Der Gegenwinkel des kürzeren Schenkels erhält jeden Werth zwischen den Grenzen 0 und R — BCA und zwar zwey Mal. Denn es sey wieder CBA die Form des Dreyecks, wobey der Winkel CAB = R — BCA ist. Jeder kleinere Winkel an demselben Scheitelpuncte, wie CAD, muß mit seinem zweyten Schenkel AD zwischen die des Winkels CAB fallen, von der Gegenseite desselben, CB, ein Stück = CE schneiden, also durch einen Punct E, näher bey dem Mittelpuncte des mit CB beschriebenen Kreises als jeder Punct seiner Peripherie hindurch gehn, mithin die Peripherie, genugsam verlängert, zwey Mal, in D und in H durchkreuzen, und auf diese Art zwey Dreyecke, CAD und CAH, darbieten, deren jedes ihn als Gegenwinkel des kürzeren Schenkels enthält.

3. Der Gegenwinkel des kürzern Schenkels ist stetig im Abnehmen begriffen, so lange der des längeren

Schenkels ein stumpfer; im Zunehmen, so lange dieser kein solcher Winkel ist.

Denn man behalte, CDA als stumpfen Winkel gedacht, für den Augenblick die Richtung AD, mit welcher ihn der kürzere Schenkel CD bildet. Dreht sich dieser bey wachsendem Winkel ACD auswärts, so muß er kürzer werden als vorhin, wenn er, als CF in jene Richtung AD hinabreichen soll (S. 211, 1.); sein Endpunct G also, CD = CG gesetzt, muß jenseits DA liegen, mithin AG auch jenseits AD, mithin der Winkel CAG größer seyn als der Winkel CAD. Ist hingegen der Winkel AKC ein rechter oder spitzer, und behält man die Richtung AK, während sich bey Wachsen des Winkels KCA dessen Schenkel KC auswärts dreht, so müßte sich dieser als CL verlängern, um bis in jene Richtung zu reichen, sein Endpunct H also, CH = CK gesetzt, muß unter jener Richtung, folglich AH unter AK liegen, mithin der Winkel AHC kleiner als der Winkel KAC seyn.

γ. Ueber die successiven Zustände der dritten Seite, wenn sich ihr Gegenwinkel ändert, während dessen Schenkel unwandelbar bleiben, ergibt sich Folgendes:

1. Sie muß mit dem Wachsen des Winkels gleichzeitig unfehlbar zunehmen.

Dreht sich (fig. 9.) der Schenkel des Winkels BCA, an dessen Endpunct ein spitzer Winkel A anliegt, auswärts, damit jener erstgenannte Winkel wachse, aus der Lage CA in die CD, wobey CA = CD bleibt, verringert sich also sein Gegenwinkel, vorher CBA, jetzt CBD, so muß des letzten zweyter Schenkel, BD,

zwischen den Schenkeln des anfänglichen CBA, und zu einem jenseits seiner Gegenseite CA gelegenen Puncte D geführt, diese Gegenseite irgendwo in E durchschreiben, und sich eben dadurch aus zwey Stücken, BE und ED, zusammensetzen, wovon das erste, BE, in das Dreyeck EBA gehört, welches von dem anfänglichen CBA abgeschnitten wird, das zweyte, ED, hingegen in das Dreyeck CED, welches sich ihm anlegt, wenn CA in die Lage CD gebracht wird. Nun ist im ersten der genannten Dreyecke,

$BE + EA > AB$, und eben so im zweyten
$ED + CE > CD$, mithin addirt:

$BD + CA > AB + CD$, woraus $CA = CD$ aus beyden Seiten weggelassen, $BD > BA$ folgt.

2. Die dritte Seite durchläuft mit Continuität alle Werthe zwischen zwey Grenzen, von denen die eine die Differenz der beyden übrigen gegebenen Schenkel, $CA - CB$, die andere deren Summe, $CA + CB$ ist.

Denn es ist, dieses vorausgesetzt, allemal ein Dreyeck aus ihr und den beyden andern möglich. Sey (fig. 12.) CB die erste, CA die zweyte, und mit dieser ein Kreis beschrieben; es erstrecke sich in der Richtung des ersten CB, von ihrem Endpuncte B aus, die dritte vorwärts als BD, rückwärts als BE. Der Annahme gemäß ist $CB + BD > CA$, und $CB - BD = CE$, d. h. $CE < AC$. Es fällt also D außerhalb, E innerhalb des mit CA beschriebenen Kreises. Diese beyden Puncte D und E gehören aber der Peripherie eines zweyten Kreises an, der aus dem Centrum B mit dem Radius BD beschrieben werden kann. Seine

Peripherie muß also die des ersten nothwendig über der Richtung von CB kreuzen. Geschieht dieses in F, so ist, da CF = CA und BF = BD, das Dreyeck CDF das verlangte.

B. Wenn bey der Bildung eines Dreyecks aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die Schenkel des angenommenen Winkels gleiche Länge besitzen, so ergibt sich über die andern Stücke des Dreyecks, falls der angenommene Winkel wandelbar wird, Folgendes:

1. Die beyden, dem Schenkel gegenüberstehenden, Winkel, allemal wie diese gleich unter einander, jeder = R — ½ BCA (fig. 13.), nehmen, wenn der an der Spitze wächst, stetig ab, und erhalten jeden Werth zwischen R und 0.

2. Die dritte schließende Seite ist aus gleichem Grunde wie vorhin (S. 217, 1.), in stetigem Wachsen begriffen und muß jeden Werth zwischen 0 und 2CA erhalten.

3. Dabey bietet der Verfolg der Construction eine besonders merkwürdige Beziehung dar. Sey (fig. 13.) BCA die erste, BCD die zweyte Form des gleichschenklichten Dreyecks, entstehend, wenn sich der erste Schenkel des Winkels C dreht, und dadurch, in der Peripherie eines Kreises mit seinen Endpuncten fortrückend, in die Lagen CA und CD gelangt, so ist offenbar auch das Dreyeck ACD ein gleichschenklichtes. Nun ist im ersten, BCA, der Winkel BAC = R — ½ BCA, im zweyten ACD der Winkel CAD = R — ½ ACD,

also addirt BAD = R — ½ BCD; wo auch A liegen möge. Mithin ist der Winkel, welcher sich der Linie AB gegenüber stellt, jederzeit von gleicher Größe, sobald sein Scheitelpunct irgendwo in dem Kreisbogen, welcher über der Sehne AB entstanden ist, genommen wird. Es eröffnet sich durch diese Betrachtung eine wichtige Beziehung der Kreisperipherie auf die Construction von Winkeln, welche weiterhin den Gegenstand besonderer Untersuchungen abgibt.

III. Die Construction eines Dreyecks aus einer Seite und zwey Winkeln, die derselben anliegen sollen.

Die Seite mag beliebig gewählt werden. In Absicht auf die Winkel muß man drey Fälle unterscheiden. Sie können mehr oder weniger, oder genau soviel als zwey rechte zusammen ausmachen. Die beyden ersten Fälle kommen auf einen zurück. Wenn (fig. 14.) CAB und ABD zusammen mehr als zwey rechte betragen, und man die Linien CA und DB, welche diese Winkel an den Enden einer dritten, AB, bilden, rückwärts verlängert, so ergeben diese Verlängerungen, AE und BF, mit der dritten, zwey Winkel, welche Nebenwinkel der vorigen sind, EAB und ABF. Alle vier sind zwey Paar Nebenwinkel, machen also vier rechte. Da die beyden ersten mehr als zwey rechte seyn sollten, so müssen die beyden letzten weniger als zwey rechte betragen. Man braucht also nur folgende Fälle zu untersuchen.

A. Wenn die beyden Winkel, welche an den Enden einer Linie AB auf der nemlichen Seite von ihr ein-

ander entgegengestellt sind, wie EAB und ABF, weniger als 2R betragen.

1. Die Nothwendigkeit, daß die aufstehenden Schenkel solcher Winkel zusammenstoßen, ergibt sich aus bereits bewiesenen Sätzen. Hat man zunächst nur am Endpuncte A der gegebenen Seite AB den ersten dieser Winkel, EAB, erzeugt, und bildet man die Dreyecksformen, welche die Seite AB und den Winkel EAB enthalten, indem der obere Schenkel dieses Winkels, AE, allmälig alle möglichen Längen erhält, in stetiger Reihe aus, so muß unfehlbar der diesem Schenkel gegenüberstehende Winkel ABE, der stetig alle Werthe zwischen 0 und 2R annimmt, auch den gegebenen ABF erhalten, mithin das verlangte Dreyeck zu Stande kommen.

B. Wenn die beyden Winkel, unter denen sich (fig. 15.) zwey Winkel an den Enden einer dritten, AB, auf derselben Seite von ihr, entgegenneigen, zusammen 2R austragen.

1. Dieser Fall ist bereits durch die Untersuchung über den Zusammenhang unter den Winkeln des Dreyecks erledigt. Die Schenkel der Winkel können nicht zusammenstoßen, weil ein Dreyeck unmöglich ist, worin zwey Winkel zusammen zwey rechte ausmachen.

2. Da in jedem anderen Falle ein Zusammenstoßen derselben erfolgen muß, so darf man, als nothwendige und ausschließliche Bedingung des Parallelismus zweyer Linien, AE und BF, die Forderung aufstellen, daß die

beyden Winkel EAB und ABF, unter denen sie sich über einer dritten, AB, einander entgegenstellen (gewöhnlich innere entgegengesetzte genannt), zusammen zwey rechte betragen müssen. Man kann diese Bedingung, wenn man statt des einen der beyden Winkel, wodurch sie eben bestimmt würde, dessen Nebenwinkel einführt, noch auf zwey andre Arten angeben. Soll EAB + ABF = 2 R (fig. 15.) seyn, und setzt man für EAB seinen Werth 2 R — EAG, so erhält man EAG = ABF. Solche Winkel, unter denen sich zwey Linien auf derselben Seite einer dritten, und gegen ihre Richtung einstimmig, neigen, pflegen, der eine, ABF, ein innerer, der andere, EAG, der ihm zugehörige äußere entgegengesetzte zu heißen. Ihre Gleichheit darf also auch als Ausdruck der nothwendigen Bedingung des Parallelismus angesehn werden. Will man hingegen statt EAB setzen 2 R — CAB, so erhält man als gleichgeltend, CAB = ABF, man kann also, da solche innere Winkel, welche zwey Linien, die auf entgegengesetzten Seiten einer dritten liegen, mit dieser bilden, innere Wechselwinkel zu heißen pflegen, auch die Gleichheit von zwey innern Wechselwinkeln als Ausdruck der nothwendigen und ausschließlichen Bedingung des Parallelismus ansehn.

3. Als nähere Bestimmung der gegenseitigen Lage paralleler Linien, ergibt sich sogleich, daß solche Linien, sofern beyde auf derselben Seite einer dritten, ihre Anfangspuncte verbindenden, fortgehn in gleichen Entfernungen von diesen Anfangspuncten, allemal gleiche und parallele Abstände von einander haben, oder daß, wenn die Parallelen AE und BF gleich lang genommen wer-

den, auch AB und EF von gleicher Länge und parallel unter sich sind.

Man ziehe, um diese Abstandslinien vergleichen zu können, d. h. um zwey Dreyecke zu stiften, worin sie, die eine im ersten, die zweyte im andern, vorkommen, AF. Diese Linie durchschneidet die angenommenen Parallelen AE und BF, muß also mit ihnen gleiche innere Wechselwinkel EAF und FAB gebildet haben. Da nun AF in beyde Dreyecke, EAF und FAB, als Seite gehört, und EA so lang als BF seyn soll, so haben die Dreyecke zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel gemein, congruiren folglich, es muß mithin AB = EF, und der Winkel AFE dem Winkel FAB gleich seyn, woraus der Parallelismus der Linien AB und EF folgt.

Für das würkliche Construiren des Dreyecks ergibt sich aus dem Voranstehenden Folgendes:

1. Die Construction des Dreyecks aus einer Seite und den beyden ihr anliegenden Winkeln, hat die Beschränkung, daß sie nur dann, wenn diese beyden Winkel zusammen 2R ausmachen, sonst aber über jeder Linie stets möglich ist. Daß sie vollkommen bestimmend, namentlich für die beyden andern Seiten des Dreyecks seyn muß, läßt sich daraus, daß zwey Constructionen, welche die gleiche Seite, und die eine an ihren Enden die nemlichen Winkel wie die andere, enthalten, allemal congruiren, leicht ableiten.

2. Was die möglichen Aenderungen von einem der drey angenommenen Grundbestandtheile betrifft, so ist offenbar, daß, wenn dieses einer von den Winkeln seyn

soll, sein Zunehmen mit dem Wachsen der ihm gegenüberstehenden Seite unzertrennlich verbunden ist, wodurch die Betrachtung des Erfolgs auf II, A. zurückkommt.

Wenn aber keiner von den beyden Winkeln, sondern nur die von ihnen eingeschlossene Seite eine Änderung erhalten soll, wo denn nur von den gleichzeitigen Aenderungen der beyden anderen Seiten die Rede seyn kann, so zeigt sich bald, daß Wachsen der ersten Seite ein Zunehmen für jede der beyden andern nothwendig nach sich zieht.

Sey (fig. 16.) das Dreyeck ABC aus der Seite AB nebst den inneren entgegengesetzten Winkeln A und B an ihren Enden construirt. Da ein Dreyeck mit zwey solchen Winkeln auf jeder Basis möglich ist, so gibt es unfehlbar ein neues Dreyeck, wenn man, mit Beybehaltung der vorigen Winkel an ihren Endpuncten, die Seite AB vergrößert. Sey nun diejenige der anderen Seiten, deren gleichzeitiges Zunehmen bewiesen werden soll, die dem Winkel ABC gegenüberstehende, AC. Man lasse alsdann AB von dem Endpuncte B aus, welcher Scheitelpunct jenes Winkels ist, wachsen, um BD. Soll nun der vorige Winkel ABC bey D ungeändert wieder erscheinen, so sind BC und ED parallel, können sich also nicht durchschneiden, es liegt folglich, da D jenseits BC genommen ist, die Linie DE jenseits der Linie CB, mithin auch der Punct E, also auch CE, welches die Aenderung von AC ist. Daß dieses mit Continuität alle möglichen Werthe annehmen kann, folgt daraus, daß rückwärts für jedes CE, welches man als Wachsthum von AC setzen möchte, wenn man E = ACB nimmt, unfehlbar ein

Dreyeck ADE zu Stande kommt, durch welches sich dasjenige BD ergibt, welchem das verlangte CE correspondirt.

IV. Construction des Dreyecks aus drey Seiten.

1. Aus drey geraden Linien, die jedoch so gewählt seyn müssen, daß zwey allemal mehr als die dritte betragen, ist jederzeit ein Dreyeck möglich, aber nur auf eine einzige, die Winkel völlig bestimmende, Weise, so daß zwey Dreyecke, wobey es für jede Seite des einen eine gleichlange des anderen gibt, völlig congruiren.

Der erste Theil des Satzes ist bereits (S. 218, 2.) dargethan, der zweyte folgt aus dem Theorem, daß jede Aenderung eines Winkels, den zwey unabänderliche Seiten einschließen, mit einer gleichzeitigen der dritten Seite in eben dem Sinne nothwendig verbunden ist (S. 217, 1.). Könnte in dem einen von zwey Dreyecken der angenommenen Art einer Seite ein anderer Winkel gegenüberstehn als in dem anderen, so müßte dieser Winkel, mit Beybehaltung der ihn einschließenden Seiten, sich selbst ändern können, ohne daß mit der ihm gegenüberstehenden Seite gleichzeitig dasselbe geschähe, welches einem bewiesenen Satze widerspricht.

2. Auf den Grund desselben Theorems fällt die Untersuchung über die verschiedenen Formen, die ein Dreyeck, welches aus den drey Seiten construirt ist, annimmt, wenn eine dieser Seiten wandelbar wird, mit einer schon vorhin geführten (I, B.) zusammen.

V. Construction des Dreyecks aus einer Seite, und zwey dieselbe nicht einschließenden Winkeln.

Die Construction eines Dreyecks aus einer Seite, einem ihr anliegenden Winkel und dem ihr gegenüberstehenden kommt, da durch diese beyden Winkel der dritte, mithin derjenige, welcher der andere anliegende für die gegebene Seite seyn muß, vorgeschrieben ist, sogleich auf die aus einer Seite und den beyden ihr anliegenden Winkeln zurück, und ist wie diese vollkommen bestimmend. Sie hat, in Absicht auf die Annahme der drey ursprünglich zu wählenden Stücke, die gleiche Beschränkung, daß beyde, sonst dem Belieben überlassene Winkel, weniger als zwey rechte betragen müssen.

VI. Construction des Dreyecks aus zwey Seiten, und einem nicht von denselben eingeschlossenen Winkel.

Die Construction des Dreyecks aus zwey Seiten, und dem Winkel, welcher der einen gegenübersteht, setzt als nothwendige Bedingung voraus, daß die dem Winkel gegenüberstehende Seite nicht kleiner seyn darf als ein jederzeit mögliches Loth, aus dem Endpuncte der ihm anliegenden Seite zwischen seinen Schenkelrichtungen herabgelassen (S. 211, 1.). Unter dieser Voraussetzung ist sie jederzeit möglich, und zwar auf eine einzige unzweydeutige Art, wenn die dem gegebenen Winkel gegenüberzustellende Seite jenem Lothe gleich, oder wenn sie größer als die ihm anzuliegen bestimmte ist; auf zwey verschiedene Arten, wenn sie kleiner als die letztgenannte seyn soll (S. 212, 2.).

Man kann auch für die beyden letzten Fälle der Dreyecksconstruction die Untersuchung über die Aenderungen anstellen, welche die jedesmaligen drey abhängigen Bestandtheile des Umfangs annehmen müssen, wenn eines der ursprünglichen beliebig geändert wird. Sie kommen größentheils ganz auf diejenigen zurück, wodurch das Gleiche für die früher betrachteten Fälle geleistet ist, führen aber, wenn man sie vollständig erörtern will, sofern man alsdann auch Dreyecke betrachten muß, in denen, während sie sich ändern, eine Seite und ihr Gegenwinkel unwandelbar bleiben, auf einige sehr merkwürdige Sätze von Winkeln und Kreisbögen, die eine weitere Ausführung eines ähnlichen, schon früher hervorgetretenen, abgeben (S. 219, 3.). Man pflegt diese Untersuchung bis in die Lehre vom Kreise zu verschieben, um sie mit anderen verwandten im Zusammenhange darzustellen.

VII. Ausführung der Dreyecksconstruction.

In den bisherigen Betrachtungen über die verschiedenen Arten, ein Dreyeck aus einzelnen, in ihm vorgeschriebenen Stücken, worunter jedesmal eine Seite seyn muß, zu construiren, welche sich zu dem Resultate, daß solcher Stücke allemal drey beliebig angenommen werden dürfen, vereinigen, wobey jedoch die modificirte Ausnahme des VIten Falls, nicht außer Acht gelassen werden darf, liegt das Mittel für die würkliche Ausführung aller dieser Constructionen bestimmte Regeln zu finden.

a. Die Construction aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bedarf keiner weiteren Regel.

b. Die Construction des Dreyecks aus drey einzelnen Linien, von denen je zwey zusammengenommen immer mehr als die dritte austragen, ist schon im Vorhergehenden auf ihre Regel zurückgebracht. Daraus ergeben sich mehrere andere Constructionen, durch deren Hülfe die sämmtlichen übrigen Fälle ohne Schwierigkeit behandelt werden können.

Die drey Linien, welche man einzeln annimmt, können entweder alle drey verschieden; es können zwey von ihnen unter einander gleich; sie können endlich alle drey identisch seyn. Im ersten Falle entsteht das ungleichseitige; im zweyten das gleichschenklichte; im dritten das gleichseitige Dreyeck. Das construirende Verfahren bleibt für alle das nemliche.

Da durch die Seiten eines Dreyecks die Winkel desselben bestimmt sind, so kann man vermöge dieser Construction die Aufgabe: einen gegebenen Winkel an jeder beliebigen Stelle zu construiren, unfehlbar auflösen. Man schneide auf den Schenkeln des gegebenen Winkels α (fig. 20.) beliebige Stücke ab, ihre Endpuncte verbindend, damit ein Dreyeck, $\alpha\beta\gamma$, zu Stande komme, welches den gegebenen Winkel enthält. Soll nun eben dieser Winkel an einem anderen Scheitelpuncte, a, wieder verzeichnet werden, so braucht man nur von jenem Puncte a aus, die Construction des Dreyecks aus denselben drey geraden Linien zu wiederholen; das Dreyeck abc wird dieselben Winkel wie das vorige, $\alpha\beta\gamma$, enthalten, und der Winkel α bey a wieder erscheinen.

c. Die Construction des Dreyecks aus einer Seite und den beyden ihr anzuliegen bestimmten Winkeln,

so wie die Errichtung von Parallelen aus zwey beliebigen Puncten, ergibt sich sogleich durch zweymalige Anwendung des eben vorhin genannten Verfahrens.

Das Ziehen einer Linie, die durch einen beliebigen Punct, parallel mit einer neben ihm gegebenen Richtung gehn soll, geschieht am leichtesten auf folgende Art.

Soll (fig. 6.) mit AC durch B eine Parallele gelegt werden, so ziehe man willkührlich BA, und mache den Winkel DBH = CAB. Alsdann ist BD die verlangte Parallele.

d. Aus einer Seite, einem ihr als anliegend, einem zweyten ihr als gegenüberstehend darzustellenden Winkel ein Dreyeck zu bilden, legt man beyde Winkel vorläufig an einem Scheitelpuncte zusammen; der Nebenwinkel dieser Summe ist der dritte des Dreyecks, und bringt die Construction auf die des vorigen Falls zurück.

e. Die Construction des Dreyecks endlich aus einem Winkel, einer ihm anliegend, und einer zweyten ihm gegenüberstehend darzustellenden Seite, verlangt, wie bereits (S. 212, 2.) dargethan worden, nur das Durchschneiden einer gegebenen Richtung mit der Peripherie eines Kreises, dessen Centrum und Radius vorgeschrieben sind, und das Ziehn von Radien zu Puncten in den so entstandenen Durchschnitten.

2. Auch die Construction der besonders wichtigen Form des rechtwinklichten Dreyecks, und durch ihre Vermittlung die des rechten Winkels, ist durch die obigen Betrachtungen vorbereitet. Daß aus jedem Puncte

außerhalb einer Richtung eine andere, die sie unter einem rechten Winkel trifft, möglich seyn muß, ist bereits dargethan (S. 211, 1 u. 2.); ebenso, daß man jederzeit ein gleichschenklichtes Dreyeck erhält, wenn man in dieser Richtung auf beyden Seiten vom Fußpuncte eines solchen Loths zu dem Puncte, aus welchem es gegen sie geführt ist, Linien zieht. Daraus folgt unmittelbar die nachstehende Regel:

a. Um (fig. 17.) auf einer Richtung AC, in einem beliebigen Puncte derselben, B, ein Loth zu errichten, nehme man von ihm aus gleiche Längen, BA und BC; errichte über ihrer Summe ein beliebiges gleichschenklichtes Dreyeck ACD, und ziehe von seiner Spitze, D, zur Mitte seiner Basis zurück. Man stiftet dadurch zwey Dreyecke, bey denen es für jede Seite des einen, im anderen eine identische gibt, in denen also den identischen Seiten, AD und DC, identische Winkel, ABD, DBC, gegenüberstehn, deren jeder, da sie Nebenwinkel sind, ein rechter seyn muß.

Auch dieser Satz ist in sofern einer Umkehrung fähig, als man behaupten darf, ein Loth aus der Spitze des gleichschenklichten Dreyecks auf seine Basis müsse deren Mittelpunct treffen, und ein Loth, welches aus der Mitte dieser Basis aufsteigt, müsse durch die Spitze des Dreyecks gehn. Das erste, weil nicht aus einem Puncte zwey verschieden gerichtete Lothe auf die nemliche Linie fallen, das andere, weil nicht zwey solche Lothe auf die nemliche Linie aus einem Puncte derselben ausgehn können.

b. Durch Hülfe des letzten Satzes ergibt sich auch die Fällung eines Perpendikels aus einem Puncte außerhalb einer Richtung auf sie. Stellt man (fig. 18.) über einer Basis BC zwey verschiedene gleichschenklichte Dreyecke, BCD, BCE, auf, so geht ein Loth, aus der Mitte der Basis auf ihr errichtet, AED unfehlbar durch die Spitzen beyder. Da durch zwey gegebene Puncte nur eine Richtung möglich ist, so muß die, welche in der That durch die Spitzen beyder Dreyecke geht, DEA zugleich die des Loths seyn, welches aus der einen wie der anderen dieser Spitzen auf die Basis, in ihren Mittelpunct fallen kann. Um also aus E ein Loth auf die Richtung ABC zu fällen, beschreibe man, mit einem unfehlbar hinlänglich zu erhalten möglichen Radius, einen Kreis, der die Richtung BC in zwey Puncten schneidet. Alsdann wird BCE ein gleichschenklichtes Dreyeck; man stelle über seiner Basis C noch ein zweytes solches, BCD; und ziehe durch die Spitzen beyder zur Basis eine Linie DEA; sie ist das Loth.

Daß durch ein Loth aus der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks die Basis sowohl als der Winkel an der Spitze halbirt wird, folgt sogleich aus der Congruenz der beyden dadurch entstehenden rechtwinklichten Dreyecke, und ergibt, da man ein gleichschenklichtes Dreyeck über jeder gegebenen Linie oder zwischen den Schenkelrichtungen jedes Winkels bilden kann, sogleich die Möglichkeit, jede Linie oder jeden Winkel zu halbiren.

Drittes Capitel.

Weitere Untersuchung über den Zusammenhang unter den Grundbestandtheilen eines Dreyecksumfangs. Aehnlichkeit der Dreyecke.

A. Zusammenhang unter den Aenderungen der Seiten eines Dreyecks, bey unwandelbaren Winkeln.

Die bisherigen Untersuchungen ergeben allerdings eine Kenntniß des Zusammenhangs zwischen der beliebigen Aenderung von einem der drey ursprünglichen Grundbestandtheile eines Dreyecksumfangs und der dadurch nothwendig gemachten Aenderung von jedem der drey übrigen. Aber sie bezeichnen diesen Zusammenhang nur im Allgemeinen, und erforschen nur, ob, und wann das Zunehmen eines ursprünglichen Grundbestandtheils mit gleichzeitigem Wachsen, oder gleichzeitigem Abnehmen eines abhängigen verbunden sey, und erfordern für jeden einzelnen Fall ein besonderes unmittelbares Construiren, wenn in der That aus der Größe der Aenderung, die dem ursprünglichen Grundbestandtheile beygelegt ist, die Größe derjenigen bestimmt erkannt werden soll, die dem abhängigen zu Theil werden muß. Sie sind also lediglich als der Anfang einer Nachforschung zu betrachten, die erst dann für vollendet gelten darf, wenn man, vorausgesetzt, daß sich jene Größen in Zahlen ausdrücken lassen, das Gesetz ihrer reellen Verknüpfung auf genau vorgeschriebene Verbindungen

unter diesen Zahlen zurückzubringen, die Möglichkeit nachweisen und realisiren kann.

Es gibt, wie der Versuch genauerer Untersuchung lehrt, nur einen Fall, bey welchem, wenn ein Dreyecksumfang aus drey ursprünglichen Grundbestandtheilen construirt ist, und weiterhin einer derselben eine Aenderung erhält, aus dieser die durch sie selbst bewürkten Aenderungen der abhängigen Grundbestandtheile des Dreyecks, nach einer einfachen, durch arithmetische Elementarbegriffe auszudrückenden, Regel abgeleitet werden können. Es ist derjenige (II.), wo, wenn ein Dreyeck aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln construirt ist, die Winkel unwandelbar bleiben, aber die Seite sich ändert, und alsdann aus ihrer Aenderung die gleichzeitigen Aenderungen von jeder der beyden anderen Seiten abgeleitet werden sollen.

1. Wenn die Winkel an der Basis eines Dreyecks dieselben bleiben, aber die Basis sich ändert, so sind die successiven Zustände der Schenkel den gleichzeitigen der Basis durchaus proportional.

Sey zuerst (fig. 19.) das Dreyeck ABC, und BD die Aenderung seiner Basis, so wird CE die gleichzeitige seines diesseitigen Schenkels, und, von dem neuen Zustande des jenseitigen abgezogen den anfänglichen, ED — CB = FD, die des jenseitigen Schenkels. Da gleichlange Parallelen in ihren Anfangspuncten denselben Abstand haben als in ihren Endpuncten, so ist CE = BF, und da zugleich diese ihren Abstand darstellenden Linien parallel unter einander sind, so zeigt

das Dreyeck BFD in seinen drey Seiten die drey Aenderungen der Seiten des anfänglichen Dreyecks, unter denselben Winkeln, wie diese, sich zusammenschließend.

Ist ein andres Mal das anfängliche Dreyeck Abc auf der Basis Ab errichtet, und wächst diese um bd, der diesseitige Schenkel Ac um ce, der jenseitige bc um df = ed — cb, so gibt das Dreyeck bfd, in seinen drey Seiten, die drey Aenderungen von den Seiten des letztgenannten anfänglichen, gleichfalls dieselben Winkel wie diese mit einander bildend.

Ist also BD = bd genommen, so fällt das Dreyeck BFD mit dem Dreyeck bfd identisch zusammen, so daß BF = bf, FD = fd werden muß. Es kommen also auf gleiche Aenderungen der Basis, BD = bd, nicht allein gleiche Incremente der diesseitigen Schenkel, BF = CE = bf = ce, sondern auch der jenseitigen, DF = df. Es sind daher die verschiedenen Zustände des einen wie des anderen Schenkels den gleichzeitigen der Basis proportional,

$$\frac{Ab}{AB} = \frac{Ac}{AC} = \frac{bc}{BC}. \quad \text{(S. 179, e.).}$$

2. Es ist unmittelbare Folge aus diesem Satze, daß sich bey Dreyecken, deren Winkel dieselben bleiben, die gleichzeitigen Aenderungen der Seiten wie die Seiten selbst verhalten, oder diesen proportional sind, wofern ABC der erste, Abc der zweyte Zustand des Dreyecks ist, mithin bB, cC, bg die Aenderungen seiner anfänglichen Seiten AB, AC, BC darstellen, so erhält man, von jedem der gleichen Quotienten

$$\frac{Ab}{AB} = \frac{Ac}{AC} = \frac{bc}{BC}$$

eine 1 abgezogen, welches der Gleichheit nichts schadet,

$$\frac{Ab}{AB} - 1 = \frac{AC - AB}{AB} = \frac{bB}{AB}, \text{ ebenso}$$

$$\frac{Ac}{AC} - 1 = \frac{Ac - AC}{AC} = \frac{cC}{AC}, \text{ und}$$

$$\frac{bc}{BC} - 1 = \frac{bc - BC}{BC} = \frac{gb}{BC}, \text{ mithin}$$

$$\frac{bB}{AB} = \frac{Cc}{AC} = \frac{bg}{BC}.$$

Es ist also klar, daß man bey solchen Dreyecken, wenn ihre Seiten in Zahlen gegeben sind, aus der Aenderung, welche eine derselben erleidet, die Aenderungen der beyden anderen berechnen kann.

3. Man kann den obigen ersten Hauptsatz mit einer geringen Modification auch so aussprechen. Wenn zwey Dreyecke (fig. 20.) ABC und abc, gleiche Winkel a = A, b = B und also auch c = C, enthalten, so ist unfehlbar $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$, oder

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}; \quad \frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bc}; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc};$$

kürzer bezeichnet, es ist

$$AB : AC : BC = ab : ac : bc.$$

Nennt man also in zwey Dreyecken, bey denen sich für jeden Winkel, in dem einen ein identischer Winkel, in dem anderen, a = A, b = B, c = C nachweisen läßt, zwey Seiten, die eine dem ersten, die andere dem zweyten Dreyecke angehörig, ähnlich liegende, wenn die eine, ab, in dem ersten Dreyeck, von denselben Winkeln, a und b, eingeschlossen wird,

oder dem nemlichen Winkel, c, gegenübersteht, wie die andere, AB, im zweyten Dreyeck, die dort von A = a und B = b eingeschlossen wird, oder dem Winkel C = c gegenübersteht, so erhält man den folgenden Ausdruck des obigen Satzes.

Wenn zwey Dreyecke nicht in Absicht auf die Winkel, sondern nur in Absicht auf die Seiten verschieden sind, so muß jede Vergleichung zwischen einer Seite des ersten und der ähnlich gelegenen des anderen, oder jede Vergleichung zwischen zwey Seiten im ersten, und den beyden ihnen ähnlich gelegenen im anderen, gleiche Resultate ergeben; kürzer ausgedrückt: ähnlich liegende Seiten in Dreyecken, welche in Absicht auf die einzelnen Winkel zusammenfallen, sind proportional.

Unter den vielfachen Anwendungen dieses Satzes mögen nur einige hier eine Stelle finden.

a. Um auf die bequemste Art von einer Linie irgend einen aliquoten Theil, $\frac{1}{n}$, zu finden, setze man eine andere Linie aus n beliebigen gleichen Theilen zusammen, beschreibe mit dieser als Schenkel über der gegebenen ein gleichschenklichtes Dreyeck, schneide auf jedem seiner Schenkel, von der Spitze des Dreyecks aus, wieder einen der n Theile ab, woraus er gebildet ist, und verbinde deren Endpuncte durch eine Linie. Diese muß $\frac{1}{n}$ der gegebenen seyn. Man könnte auch die zu theilende Linie als den einen Schenkel, die willkührlich aus n gleichen Stücken zusammengesetzte, als den anderen eines übrigens beliebig zu bildenden Dreyecks ansehn, und eine Parallele mit der Basis durch den End-

punct des ersten jener gleichen Stücke, das von der Spitze des Dreyecks aus auf ihm dargestellt ist, zum ersten Schenkel vom zweyten hinüberführen, wodurch $\frac{1}{n}$ von jenem abgeschnitten seyn muß. Aber dieses Verfahren ist weniger brauchbar, als das vorige.

b, Um zu drey gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionale zu erhalten, trage man die erste und zweyte (fig. 16.) AC, AE, auf den einen Schenkel, die dritte, AB, auf den anderen eines beliebigen Winkels, jede anhebend vom Scheitelpuncte desselben, und ziehe durch den Endpunct der zweyten, eine Linie DE parallel mit derjenigen CB, welche die Endpuncte der ersten und dritten verbindet. Sie ergibt den neuen Abschnitt AD, und es muß, wegen der gleichen Winkel in den Dreyecken ABC, ADE, unfehlbar $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, also $AD = \frac{AE}{AC} . AB$ seyn.

B. Begriff der Aehnlichkeit.

Es zeigt sich in dem vorigen Satze, wenn auch anfangs nur beschränkt auf Dreyecke, die Möglichkeit einer Beziehung, welche, für anzustellende Vergleichung von Gestalten im Raume überhaupt, einen der wichtigsten geometrischen Begriffe erzeugt: daß es nemlich Figurenumfänge geben kann, welche nur in Absicht auf die absolute Größe der Linien, woraus sie sich zusammensetzen, von einander verschieden, in allen übrigen Rücksichten aber identisch sind; Figuren also, von denen, sofern sie geradlinigte ebene sind, die eine in ihrem

Umfange die nemlichen Winkel, in derselben Folge, wie die andere, von denen also die eine eben so viele Seiten als die andere enthält; jeder Seite der einen eine ähnlich liegende in der anderen correspondirt; und bey denen jede zwey beliebig gewählte Seiten der einen das nemliche gegenseitige Verhältniß haben als die beyden ihnen ähnlich liegenden der anderen, oder, was damit auf dasselbe hinausläuft: bey denen aus der Vergleichung zwischen jeder Seite der einen, und der ähnlich liegenden der anderen, stets das nemliche Verhältniß hervorgeht. Solche Figuren werden einander ähnlich genannt.

C. Bedingungen für die Aehnlichkeit der Dreyecke.

Es ist offenbar, daß (fig. 20.) für zwey Dreyecke, ABC und abc, die einander ähnlich sind, sechs Bedingungen statt finden, drey von den Winkeln, $A = a$, $B = b$, $C = c$; drey von Seiten $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$, oder was damit einerley ist, $AB : BC : AC = ab : bc : ac$, hergenommen. Es ergibt sich theils aus dem vorigen Fundamentalsatze selbst, theils aus einer leicht zu rechtfertigenden Umkehrung und Modification desselben, das allgemeine Theorem: daß Dreyecke ähnlich sind, sobald sie zwey von den Bedingungen der Aehnlichkeit erfüllen, welches nur in dem Falle, wo die Bedingungen der Aehnlichkeit von einem Winkel, und den beyden ihn nicht einschließenden Seiten, hergenommen sind, einer Beschränkung bedürftig ist.

1. Dreyecke sind ähnlich, wenn es für jeden von ey Winkeln des ersten einen ihm gleichen im anderen ıt, A = a, B = b.

Denn daraus folgt von selbst, C = c, und, ver-lge des Fundamentalsatzes,

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}.$$

Es ist diesem Satze gemäß zu jedem Dreyecke, BC, ein ihm ähnliches, abc, in jedem beliebigen erhältniß der ähnlich liegenden Seiten möglich, da ian ab, und also $\frac{AB}{ab}$ nach Belieben annehmen, und ets a = A, b = B machen kann. Es ist aber, so-ald dieses Seitenverhältniß vorgeschrieben wird, zu em gegebenen ABC nur ein einziges ihm ähnliches bc möglich.

2. Dreyecke sind ähnlich, wenn sich jede Seite des sten einer des anderen so zuordnen läßt, daß sie aarweise proportionirt werden:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} \text{ und } \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc};$$

er mit anderen Worten, wenn sich die Seiten des nen unter einander eben so verhalten als die des an-ren, AB : AC : BC = ab : ac : bc. Aus der nnahme folgt von selbst, daß auch $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$. Nun y über der Seite $\alpha\beta$ = ab ein Dreyeck $\alpha\beta\gamma$ errichtet, welchem der Winkel α = A und β = B, so ist, ermöge 1,

$$\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{AC}{\alpha\gamma} = \frac{BC}{\beta\gamma}.$$

Da aber $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$ seyn soll, so folgt, da ab $= \alpha\beta$ ist, daß auch ac $= \alpha\gamma$ und bc $= \beta\gamma$, daß also die Dreyecke abc und $\alpha\beta\gamma$ identisch sind, mithin $a = \alpha = A$ und $b = \beta = B$, woraus sich von selbst auch $c = C$ ergibt. Es besitzen also die beyden anfänglichen Dreyecke ABC und abc gleiche Winkel, bey proportionirten ähnlich liegenden Seiten.

Dreyecke also, von denen das eine nicht die nemlichen Winkel wie das andere enthält, können nicht proportionirte Seiten besitzen, mithin nicht einander ähnlich seyn, und umgekehrt.

3. Dreyecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des ersten einem des anderen gleichkommt, $A = a$, und zwey Seiten des ersten, zweyen, gegen den genannten Winkel ähnlich gelegenen, im anderen proportionirt sind: also entweder $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, wenn die Seiten den Winkel einschließen, oder $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, wenn sie ihn nicht einschließen. Man kann die letzte Bedingung auch so aussprechen: wenn zwey Seiten des ersten Dreyecks sich ebenso, wie die beyden, gegen den ihnen gemeinschaftlichen Winkel ähnlich gelegenen, Seiten des anderen Dreyecks verhalten, also

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}, \text{ oder } \frac{AB}{CB} = \frac{ab}{cb}.$$

Die Construction bleibe, wie im vorigen Falle, das neue Dreyeck $\alpha\beta\gamma$, ähnlich mit ABC ergibt

$$\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{AC}{\alpha\gamma} = \frac{BC}{\beta\gamma}.$$

Soll nun das eine Mal $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, und $ab = \alpha\beta$ seyn, so folgt aus dem gleichzeitig statthabenden $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{AC}{\alpha\gamma}$, daß $ac = \alpha\gamma$; die Dreyecke $\alpha\beta\gamma$ und abc sind also identisch, weil $\alpha = A = a$; $ab = \alpha\beta$ und $ac = \alpha\gamma$. Ist das andere Mal $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, und wie vorhin $ab = \alpha\beta$, so ergibt sich daraus, in Verbindung mit dem gleichzeitig stattfindenden $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{BC}{\beta\gamma}$, daß $bc = \beta\gamma$ seyn muß. Die Dreyecke abc und $\alpha\beta\gamma$ sind also auch alsdann, weil $a = A = \alpha$, $ab = \alpha\beta$ und $\beta\gamma = bc$, vorausgesetzt, daß die drey genannten Stücke ihres Umfangs zur Bestimmung desselben völlig hinlänglich gewesen sind, identisch, mithin auch $\beta = B = b$ und $\gamma = C = c$. Folglich sind alsdann auch abc und ABC ähnlich.

Nicht immer also werden Dreyecke ähnlich seyn, wenn sie einen Winkel gemein haben, und die ihn nicht einschließenden Seiten in beyden proportionirt sind. Der merkwürdige Satz, daß, wenn man in einem Dreyeck (fig. 20. a.) einen Winkel, C, halbirt, die dadurch entstehenden Abschnitte in seiner Gegenseite, DA, DB, den ihnen anliegenden Schenkeln des Dreyecks CA, CB, proportional sind, also $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$, gibt davon ein Beyspiel.

Denn fällt man die Lothe BE und FA auf die halbirende Linie CDF, so sind die rechtwinklichten

Dreyecke CAF und CBE, wegen der gleichen Winkel bey C; ähnlich; also $\frac{AF}{EB} = \frac{CA}{CB}$. Die rechtwinklichten Dreyecke BED und ADF sind auch ähnlich wegen der gleichen Winkel bey D, also $\frac{AF}{EB} = \frac{DA}{DB}$. Daraus folgt, daß $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$. Offenbar also haben die Dreyecke CAD und CDB gleiche Winkel bey C, und ergeben $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, sind sich aber dennoch keineswegs ähnlich, sobald sie nicht identisch ausfallen, welches nur, wenn das anfängliche Dreyeck gleichschenklicht ist, eintreten kann.

D. Aehnliche Dreyecke über gemeinschaftlicher Seite.

1. Sobald zwey Dreyecke, ABC und abc, ähnlich; die Seiten des einen, AB, AC, BC, bekannt sind; und eine Seite des anderen, ab, gleichfalls gegeben ist, kann man bloß durch Proportionalität jede seiner beyden übrigen Seiten,

$$bc = \frac{ab}{AB} \cdot BC \quad \text{und} \quad ac = \frac{ab}{AB} \cdot AC$$

finden, und, sofern die gegebenen Linien meßbar sind, in Zahlen ausdrücken. Haben also die beyden ähnlichen Dreyecke eine Seite gemein, ohne dabey übrigens identisch zu seyn, so müssen sich die übrigen Seiten des einen durch die des anderen ausdrücken lassen.

2. Zu jedem Dreyecke ABC (fig. 21 und 22.), welches über einer beliebigen Basis AB aufgerichtet ist (ein

über derselben mit gleichen Schenkeln stehendes ausgenommen), kann ein ihm ähnliches, aber nicht identisches, auf folgende Art über derselben Basis construirt werden. Man behalte den einen Winkel an der Basis A, verwechsle aber den anderen ABC, so daß also ein neues Dreyeck ABD entsteht, welches die Basis AB und den einen Winkel an ihr A, mit dem anfänglichen ABC gemein hat, und worin ABD = ACB, und folglich D = ABC erscheinen muß. Beyde Dreyecke müssen ähnlich seyn, weil sie identische Winkel enthalten.

3. Als unmittelbare Anwendung des ersten Satzes über den Zusammenhang unter den Bedingungen der Aehnlichkeit, ergibt sich für zwey solche Dreyecke, daß in ihnen $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ ist, welche Sätze, wenn man sich hypothetisch statt der Linien Zahlen denkt, die aus ihrer Messung durch einen gemeinschaftlichen Maaßstab entsprungen, und aus gleichbenannten in unbenannte verwandelt sind, auch in den Formen

$BD \cdot AC = AB \cdot BC$ und $AD \cdot AC = (AB)^2$

ausgedrückt werden können.

4. Die Winkel an der Basis, welche sich auf die angegebene Art mit einander verwechseln, können nach Belieben, beyde spitz, es kann auch der eine ein rechter, oder ein stumpfer seyn. Unter diesen Fällen verdient derjenige, wo einer der genannten Winkel ein rechter ist, besonders hervorgehoben zu werden. Ist in der That (fig. 22.) der Winkel ABC ein rechter, so wird nicht allein das, durch seine Verwechslung mit dem an

der Spitze C, entstehende neue Dreyeck ADB, dem anfänglichen ABC ähnlich, sondern das dritte DBC gleichfalls, welches durch die Construction gleichzeitig entspringt. Denn dieses hat mit dem anfänglichen den Winkel an der Spitze C gemein, und enthält (wie jenes bey B) bey D, einen rechten Winkel. Es ergibt sich auf diese Art der merkwürdige Satz, daß jedes rechtwinklichte Dreyeck, ABC, durch ein Loth, BD, aus dem Scheitelpuncte des rechten Winkels B auf die gegenüberstehende Seite, in zwey andere, ABD, BDC, zerfällt, die ihm selbst, und also auch unter einander ähnlich sind, von denen jedes eine Seite mit ihm, und die eine andere unter sich gemein haben.

5. Da sich jede Seite von einem der beyden kleineren rechtwinklichten Dreyecke durch die Seiten des anfänglichen größeren muß ausdrücken lassen, mithin auch jede der beyden, AD aus dem ersten, und DC aus dem zweyten, welche zusammen selbst AC, eine von den Seiten des anfänglichen ausmachen, so ergibt sich die Möglichkeit, in jedem rechtwinklichten Dreyecke eine bestimmte Beziehung zwischen den drey Seiten desselben auszumitteln. Man hat aus dem ersten $AD = \frac{AB \cdot AB}{AC}$, aus dem zweyten $DC = \frac{CB \cdot CB}{AC}$, mithin $AD + DC = AC = \frac{AB \cdot AB + BC \cdot BC}{AC}$. Denkt man sich, daß die Größen auf beyden Seiten durch Zahlen, die sich auf die nemliche Einheit beziehn, dargestellt angenommen werden können, so ergibt sich, mit einer klei-

nen arithmetischen Aenderung der Form: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$.

Dieses ist der longmetrische Ausdruck des pythagorischen Lehrsatzes, welcher die Möglichkeit darbietet, aus zwey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks die dritte durch Rechnung zu finden, zugleich aber die Incommensurabilität der dritten Seite eines solchen Dreyecks gegen die beyden anderen, in den meisten Fällen, unwidersprechlich beweist.

Würde im rechtwinklichten Dreyeck ABC der Winkel ABC größer, während seine Schenkel sich nicht ändern, so müßte seine Gegenseite AC wachsen, würde er kleiner, so müßte sie abnehmen. Ist also in einem Dreyeck ABC der Winkel bey B ein rechter, so wird $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$; ist er stumpf, so muß $(AB)^2 + (BC)^2 < (AC)^2$; ist er spitz, $(AB)^2 + (BC)^2 > (AC)^2$ seyn.

6. Ist keiner von den beyden sich verwechselnden Winkeln ein rechter, so gibt es nur einen Fall, wo dennoch aus der Verbindung der beyden entstehenden Dreyecke auf eine bestimmte Beziehung bloß unter den Seiten des anfänglichen sofort geschlossen werden kann, wenn nemlich dieses anfängliche (fig. 23.) ABC, sofern in ihm AB = CB, gleichschenklicht, und dabey so beschaffen seyn kann, daß auch das dritte BCD, welches bey der Construction des über der gemeinschaftlichen Seite AB sich bildenden zweyten ABD, entsteht, ein gleichschenklichtes wird. Dies kann nur geschehn, wenn der Winkel A = ACB, und dieser (als äußerer des gleichschenklichten Dreyecks BCD), = 2D, zugleich aber auch (als gehörig in das gleichschenklichte Dreyeck

ABC) $A = R - \frac{1}{2} D$, also $R - \frac{1}{2} D = 2 D$, folglich $D = \frac{2}{5} R$, mithin A (welches $R - \frac{1}{2} D$ war) $\frac{4}{5} R$, also der anfängliche Winkel ABC, (welcher $2R - 2A$ war) $= \frac{2}{5} R$ ist. Für die particuläre Form eines gleichschenklichten Dreyecks ABC, das in der Spitze B einen Winkel $= \frac{2}{5} R$ hat, gilt daher die Beziehung, daß in ihm $\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC + CB} = \frac{AB}{AC + AB}$ $= \frac{AC}{AB}$ ist.

7. Es lassen sich allgemein für die drey ähnlichen Dreyecke, die jedes rechtwinklichte darstellt, wenn man auf seine Hypotenuse aus deren Gegenwinkel ein Loth herabläßt, dadurch, daß man alle möglichen Verhältnisse unter den ähnlich liegenden Seiten derselben bildet, und sie paarweise gleich setzt, neue Gleichungen erhalten, deren jede eine merkwürdige Beziehung zwischen vier in der Figur vorhandenen Linien ausdrückt.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AC};$$

$$\frac{DB}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{CB}{AC};$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{CD} = \frac{AB}{BC}.$$

Die letzten drey Sätze sind offenbar Folgen aus den sechs ersten. Am häufigsten kommt von diesen Sätzen $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{CD}$; oder, arithmetisch gefaßt, $AD \cdot CD = (DB)^2$, vor.

Viertes Capitel.

Vom Kreise.

Es ist schon bey der Aufstellung der ersten Prin-
pien bemerkt worden, daß der Kreis, theils als eine
onstruction, wodurch Gleichheit gerader Linien erhalten
erden kann, theils als nothwendiger Begleiter der
Winkelbeschreibung, in die Elementargeometrie gehöre,
ß er hingegen, sofern er eine krumme Linie ist, ei-
ntlich ins Gebiet der höheren Geometrie falle, daß
er dennoch seine Betrachtung auch in der letzten Hin-
ht, mit Ueberschreitung einer übrigens beachteten
renze, in die Elemente aufgenommen werde.

Der Kreis entsteht bekanntlich bey der Winkelbe-
reibung. Eine Linie, sein Radius, drehe sich um
ren Anfangspunct, bis sie in ihre anfängliche Lage
rückgekommen ist. Ihr beliebig gewählter Endpunct,
ird alsdann einen völlig in sich selbst zurücklaufenden,
sammenhängenden Zug, die Peripherie des Krei-
s, beschreiben.

Daß ein Kreis nur ein Centrum haben kann, ist
ar. Gäbe es ein zweytes, so wäre eine Linie, die
rch beyde bis zur Peripherie geht, ein Radius, gleich-
ng, man mögte sie im ersten oder zweyten anheben
ssen, welches sich widerspricht.

I. Der Kreis als krumme Linie. Lagen gerader Linien gegen ihn.

a. Die Peripherie als Curve; ihre Bestimmung durch Puncte.

1. Eine gerade Linie ist die Peripherie nicht, weil sie in sich selbst zurückläuft; daß überhaupt kein Theil von ihr gerade seyn kann, daß sie mithin eine krumme Linie seyn muß, ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Man verbinde zwey Puncte der Peripherie durch eine gerade Linie, oder ziehe im Kreise eine beliebige Sehne (fig. 24.), z. B. AB. Ihre Endpuncte, in der Peripherie liegend, sind gleichweit vom Centrum des Kreises entfernt; Radien von da zu ihnen, CA, CB, schließen ein gleichschenklichtes Dreyeck mit ihr ein. Nun ist es aus der Lehre vom Dreyecke bekannt, daß aus einem gegebenen Puncte nur zwey gleichlange Linien zu einer ihn nicht enthaltenden Linie herabgezogen werden können, zwischen denen genau in die Mitte, der kürzeste unter allen möglichen, das Loth CD, herabgeht, und die um desto länger werden, je weiter die Puncte, worin sie auftreffen, von diesem Lothe sich entfernen. Jeder Punct der Sehne also, der zwischen ihren Endpüncten liegt, wie E, D, hat einen geringeren Abstand vom Centrum als die Radiusweite, liegt also im Innern des Kreises; jeder Punct wie F, der jenseits ihrer Grenzpuncte genommen wird, fällt außerhalb des Kreises; sie hat also nichts als ihre Grenzpuncte mit der Peripherie gemein, und schneidet als Sehne nur einen Bogen von der Peripherie ab.

2. Der Natur des gleichschenklichten Dreyecks gemäß wird jede Sehne, zugleich mit dem ihr am Centrum gegenüberliegenden, von Radien, die aus ihren Enden aufsteigen, gebildeten Winkel, durch das aus dem Mittelpuncte auf sie gefällte Loth halbirt. Namentlich hat die Umkehrung, welche dieser Satz erlaubt, weil auf einer Linie, in einem gegebenen Puncte, nur ein Loth stehen kann, große Erheblichkeit: daß nemlich in einem, auf einer beliebigen Sehne durch ihre Mitte errichteten Lothe, nothwendig das Centrum des Kreises zu finden seyn muß, dem die Sehne angehört. Daraus folgt, daß zwey beliebig angenommene Puncte, durch welche die Peripherie eines Kreises gehn soll, nicht hinreichen, die Construction desselben zu bestimmen, da sie nichts weiter als eine Sehne geben; daß man aber doch eine einzige gerade Linie, nemlich ein die Sehne halbirendes Loth, als diejenige aufstellen darf, in welcher, gleichviel wo, der Mittelpunct jedes Kreises genommen werden muß, der die gegebene Sehne in sich fassen soll.

3. Sobald nur drey verschiedene, nicht in eine gerade Linie fallende Puncte für die Peripherie eines Kreises gegeben sind, erhebt sich seine Construction zu einer durchaus bestimmten. Es seyen (fig. 25.) A, B, D, die drey gegebenen Puncte. Wären bloß die beyden ersten, A, B, gegeben, so ließe sich nichts weiter sagen, als daß in jedem Puncte des sie halbirenden Loths, EC, der Mittelpunct des gesuchten Kreises genommen werden könnte. Aber es ist noch ein dritter Punct der Peripherie vorhanden, D, welcher, mit dem zweyten verbunden, eine zweyte Sehne, BD, für den-

selben Kreis darbietet. Auch in dem Perpendikel, welches in ihrer Mitte errichtet werden kann, FC, muß irgendwo das Centrum des gesuchten Kreises liegen. Dies kann also nirgendwo, als in einem beyden Perpendikeln gemeinschaftlichen Puncte, das heißt, in ihrem Durchschnitte C, zu finden seyn, und es ist nothwendig, daß es einen solchen gebe, weil sie, auf verschiedenen Richtungen senkrecht stehend, nicht parallel unter einander seyn können. Ist aber das Centrum eines Kreises nebst einem Puncte seiner Peripherie festgelegt, so ist die ganze Construction desselben durchaus bestimmt. Es gilt also die Behauptung, daß durch drey, nicht in die nemliche Richtung fallende Puncte, zwar allemal, aber nur auf eine einzige Weise, ein Kreis gelegt werden kann. Zwey verschiedene Kreislinien können dem gemäß nur zwey Puncte mit einander gemein haben.

b. Genauere Bestimmung der Lagen gerader Linien gegen die Peripherie.

Eine characteristische Eigenschaft, wie sie nur krummen Linien zukommen kann, besitzt die Kreislinie, wenn man nach der Lage frägt, welche gerade Linien gegen sie annehmen können. Wenn zwey verschiedene gerade Linien einen Punct gemeinschaftlich haben, so durchschneiden sie sich in diesem Puncte, das heißt: jede von ihnen tritt, jenseits dieses gemeinschaftlichen Puncts fortgeführt, auf die entgegengesetzte Seite der anderen. Wenn man hingegen eine gerade Linie und einen Kreisbogen von einem gemeinschaftlichen Puncte ausgehen

läßt, so können sie dabey zwey der Art nach verschiedene Lagen gegen einander annehmen.

1. Es sey (fig. 26.) A ein Punct der Peripherie, durch den eine gerade Linie gelegt werden soll. Man ziehe, um deren Lage fixiren zu können, zu ihm einen Radius, CA. Die gerade Linie wird entweder unter schiefen, oder unter rechten Winkeln gegen ihn treffen. Geschieht es unter schiefen Winkeln, so tritt sie auf der Seite, wo sie mit dem Radius einen spitzen Winkel bildet, als Sehne in den Kreis ein, schneidet ihn also, weil sie vorher außerhalb gewesen ist, nothwendig. Es sey CAG ein spitziger Winkel; es giebt also ein Loth aus C auf AG. Jenseits dieses Loths, eben soweit von ihm als CA, geht zu ihm ein gleichlanger Weg, BC, herab, der also auch in die Peripherie des Kreises, und die gerade Linie führt, sie also offenbar als Sehne des Kreises erscheinen läßt.

2. Ist hingegen eine gerade Linie durch den Endpunct des Radius senkrecht auf ihn gesetzt, so kann kein zweyter Punct von ihr in die Peripherie, und noch weniger in das Innere des Kreises fallen. Es stehe (fig. 27.) auf dem Radius CD, durch seinen Endpunct die Linie EDF senkrecht. Da der Radius selbst als Loth auf diese Linie aus dem Centrum angenommen ist, und jeder andere Weg aus eben diesem Puncte zu ihr herab länger seyn wird als das Loth, so steht jeder andere Punct in ihr um mehr als die Radiusweite vom Centrum ab, liegt also außerhalb der Peripherie. Unsere Linie hebt folglich nur einen einzigen Punct aus dem Umfange des Kreises heraus, und befindet sich durchaus auf der nemlichen Seite von

ihm, so wie er auf einer und derselben Seite von ihr liegen bleibt.

Von einer solchen geraden Linie sagt man, sie berühre den Kreis, oder sey seine Tangente. Der allgemeine Begriff der Tangente fordert eine gerade Linie, die mit einer Curve einen Punct gemein hat, so daß zwischen beyde von ihm aus nicht noch eine zweyte gerade Linie gezogen werden kann, welche, wenigstens anfangs, sie selbst auf verschiedenen Seiten von sich liegen ließe. Daß dies bey der Tangente der Fall nicht seyn kann, erhellt auf den ersten Blick. Eine Linie, die auf dem Radius in seinem Endpuncte nicht lothrecht stehn soll, muß schiefe Winkel mit ihm einschließen. Alsdann aber ist sie eine Sehne, und jede Sehne, sofern sie im Kreise liegt, fällt auf die entgegengesetzte Seite der Peripherie in Vergleichung gegen eine andere Linie, die mit ihren sämmtlichen Puncten außerhalb derselben liegen soll.

3. Eine Tangente ist für die genauere Erörterung der Bewegung, wodurch die Peripherie entsteht, von Wichtigkeit. Sowohl deswegen, weil zwischen sie und den Kreis, von dem, beyden gemeinschaftlichen Puncte, aus, keine andere gerade Linie gezogen werden kann, als auch darum, weil sie die einzige ist, die vorwärts und rückwärts von dem genannten Puncte aus dieselbe Lage gegen die Peripherie hat, eignet sie sich einzig, die augenblickliche Richtung auszudrücken, welche der, die Peripherie beschreibende, Punct, da, wo ihn die Tangente trifft, würklich besitzt, aber im ferneren Fortschreiten nicht beybehält. Diese ist also stets lothrecht auf den Radius in seinem die Peripherie beschreibenden

Endpuncte. Wenn ein Kreis sich mit einer geraden Linie durchkreuzt, so kann also von einem Winkel, welchen beyde bilden, nur in sofern die Rede seyn, als die Tangente des Kreises, welche seine momentane Richtung darstellt, im Puncte des Zusammentreffens mit jener geraden Linie einen solchen mit ihr einschließt. Kreuzen sich zwey Kreisperipherien, so bedeutet ihr Winkel denjenigen, welchen ihre Tangenten im gemeinschaftlichen Puncte darstellen.

4. Eine Tangente durch einen vorgeschriebenen Punct der Peripherie zu legen, zieht man zu diesem einen Radius, und errichtet auf ihm im Endpuncte ein Loth. Von einem Puncte außerhalb des Kreises, wie A (fig. 27.), eine Tangente an ihn zu führen, muß ein rechtwinklichtes Dreyeck, ACB, dessen Hypotenuse die gegebene AC, dessen eines Loth der Radius CB ist, gebildet werden. Da diese Construction völlig bestimmend ist, so gibt es nur ein solches Dreyeck über AC, ein zweytes unter AC; es gibt also von jedem Puncte außerhalb der Peripherie zwey gleiche Tangenten an den Kreis, und nur diese. Man erhält eine solche am leichtesten, wenn man an G eine Tangente legt, sie mit der Peripherie eines aus A beschriebenen Kreises, dessen Radius AC ist, in H durchschneidet, und aus diesem Puncte nach C eine Linie zieht, wo denn der Durchschnitt derselben mit dem Umfange des gegebenen Kreises, B, derjenige ist, in dem eine aus A gezogene Richtung, AB, den Kreis berühren muß. Die Identität der beyden Dreyecke, CBA und CGH, die C gemein, CB = CG, CA = CH haben, ergibt, daß der

Winkel CBA ein rechter seyn muß, weil CGH ein solcher ist.

c. Die Peripherie als gleichförmig krumme Linie.

1. Der Punct, welcher die Peripherie eines Kreises erzeugt, muß seine Richtung, welche sich momentan durch seine Tangente darstellt, unaufhörlich ändern. Ist ein Bogen AB (fig. 28.) beschrieben, und sind ADE, DBF Tangenten an dessen Endpuncten, so beträgt der Unterschied beyder Richtungen, sofern sie einstimmig vorwärts genommen sind, soviel als der Winkel EDB, der äußere Winkel des Vierecks, welches die beyden Radien mit den beyden Tangenten einschließen; um diesen Winkel hat also der Punct, welcher im Kreise von A nach B fortgerückt ist, seine Richtung geändert. Der nemliche Winkel kann auf eine leichtere Weise dargestellt werden. In dem genannten Vierecke betragen die vier Winkel zusammen soviel als die Summe aller Winkel in den beyden Dreyecken, welche durch die Sehne AB in ihm entstanden sind, also 2 . 2R. Nun sind zwey seiner Winkel, diejenigen, welche die Tangenten mit den Radien einschließen, bey A und B, rechte Winkel; es müssen also die beyden anderen zusammen die noch fehlenden zwey rechte austragen. Der Winkel, welchen die Tangenten in dem Vierecke selbst mit einander einschließen, ist der Nebenwinkel desjenigen, der die Richtungsänderung im Uebergange von der einen zur anderen darstellt. So zeigt also der Winkel, den die beyden Radien am Mittelpuncte einschließen, ACB, um wie viel der im Kreisbogen AB fortrückende Punct seine Richtung geändert hat, und macht es über=

flüssig, bey den Untersuchungen über diese Aenderungen Tangenten zu construiren.

2. Die drehende Bewegung, wodurch sich der Kreis erzeugt, bringt Winkel am Mittelpuncte des Kreises, und Bögen der Peripherie zwischen ihren Schenkeln in solcher Verbindung hervor, daß gleichen Winkeln am Mittelpuncte, wie (fig. 28.) BCB, ACG, gleiche Bögen der Peripherie, AB, BG, zwischen ihren Schenkeln correspondiren.

Denn wenn die Winkel zur Congruenz gebracht würden, und alsdann irgend ein Zwischenpunct des Bogens, zwischen Schenkeln des einen Winkels, nicht auf den Bogen zwischen den Schenkeln des zweyten fiele, so würde, da beyde Bögen die Schenkel des Winkels abschließen, eine Linie, vom Centrum zu jenem Zwischenpunct gezogen, auch den anderen Bogen treffen, und in sofern ihre Länge ändern müssen, während sie in beyden Fällen ein Radius wäre.

Der Punct also, welcher die Peripherie eines Kreises beschreibt, ändert seine Richtung beständig, aber er ändert sie gleichförmig, das heißt immer gleichviel, wenn die durchlaufenen Wege gleichgroß sind. Der Kreis, welcher mit einem kleineren Radius beschrieben wird, ändert sie stärker, als der mit einem größeren Radius erzeugte, wenn man zugeben will, daß seine Peripherie, und dem gemäß gleich aliquote Theile von ihr an absoluter Länge weniger betragen, als die eines mit größerem Radius beschriebenen Kreises.

II. Der Kreis in Beziehung auf Winkelmessung.

Die nahe und unmittelbare Beziehung, in welcher ein Winkel zu dem Kreisbogen steht, den die drehende Bewegung gleichzeitig mit ihm erzeugt, springt von selbst in die Augen. Es ergibt sich aber, bey genauerer Betrachtung, in Absicht auf den Zusammenhang zwischen Winkeln und Kreisbögen, folgendes allgemeine Theorem.

Wenn es möglich ist, von jedem Kreisbogen anzugeben, welchen aliquoten Theil seiner Peripherie er ausmacht; so läßt sich jedesmal, wenn zwey gerade Linien die Peripherie eines Kreises, mit dem sie in einer Ebene liegen, erreichen, aus den Bögen derselben, die sie zwischen sich fassen, ihre gegenseitige Lage genau bestimmen.

Diese Linien sind entweder convergent, oder parallel. Im ersten Falle stoßen sie entweder im Centrum, oder in der Peripherie, oder innerhalb, oder außerhalb des Kreises zusammen.

A. Centriwinkel.

Aus dem eben vorhin ausgesprochenen Satze, daß gleichen Winkeln, unter Annahme des nemlichen Radius gleiche Kreisbögen zwischen ihren Schenkeln angehören, woraus sich das Umgekehrte von selbst ergibt, daß Centriwinkel und Bögen zwischen ihren Schenkeln sich gegenseitig proportional sind (S. 179, e.), daß also, um zwey beliebige Winkel mit einander zu vergleichen, mit willkührlichem Radius, nur für beyde dem nemlichen, zwischen ihren Schenkeln Kreisbögen beschrieben,

und diese mit einander verglichen werden mögen. Winkel am Centrum eines Kreises, Centriwinkel, verhalten sich wie die Bögen der Peripherie, auf denen sie stehn.

So kann also die Vergleichung der Winkel auf die von Linien zurückgebracht, und dadurch wesentlich erleichtert werden. Es schadet nicht, daß diese Linien krumm sind, denn die Gleichförmigkeit ihrer Krümmung läßt sie für die gegenwärtige Absicht geraden Linien ähnlich werden; ein kleiner Kreisbogen kann ebenso zur Messung eines größeren, mit gleichem Radius beschriebenen, wiederholt in demselben aufgetragen werden, wie zu gleichem Zweck die kleine gerade Linie in der größeren. Auch ist es einleuchtend, daß man den Linien, durch deren Vergleichung mittelbar die der Winkel geleistet werden soll, jede beliebige Größe ertheilen kann, indem man den Radius willkührlich annehmen darf, womit die Kreisbögen beschrieben werden, daß also die empirische Messung in eben dem Maaße schärfer werden kann, als die Größen, welche sie vermitteln, fähig sind, sich in eine größere Zahl erkennbarer aliquoter Theile zerlegen zu lassen.

Könnte die Elementargeometrie eine allgemeine Methode angeben, jeden Kreisbogen in eine beliebige Zahl gleicher Theile zu zerlegen, so wäre dadurch zugleich die allgemeine Aufgabe der Winkelvergleichung aufgelöst. Wenn sich aber eine solche Methode im Allgemeinen nicht geben läßt, so findet doch der große Vortheil statt, daß ein einziger Kreis, dessen Peripherie in gleiche Theile zerlegt worden, zur Vergleichung aller Winkel gebraucht werden kann, wenn man sein Centrum mit dem Scheitelpuncte jedes Winkels zusammen-

fallen lassen, die Schenkel desselben bis zu seiner Peripherie führen, und den Bogen, welchen sie aus dieser abschneiden, als Vielfaches von einem aliquoten Theile der Peripherie ausdrücken kann.

So wie man den rechten Winkel in 90 gleiche Theile, oder Grade; jeden Grad in 60 Theile oder Minuten; jede Minute in 60 Theile oder Secunden u. s. w. zu zerlegen pflegt; so theilt man die ganze Peripherie des Kreises in vier Quadranten, jeden Quadranten in 90 gleiche Bögen, wovon jeder Bogen eines Grades heißt; jeden solchen in 60 kleinere, Bögen einer Minute, u. s. w. Dies gewährt die Bequemlichkeit, daß man, die Größe eines Bogens ablesend, der zwischen die Schenkel eines Centriwinkels fällt, zugleich auch die Größe dieses Winkels selbst ausgesprochen hat, da die eben genannte Form der Eintheilung auch bey der Messung von Winkeln eingeführt ist. Man pflegt diese Beziehung zwischen Bogen und Winkel in einem abgekürzten, uneigentlichen Ausdrucke dadurch zu bezeichnen, daß man den Bogen das Maaß des Centriwinkels nennt, der ihn zwischen seinen Schenkeln enthält.

B. Peripheriewinkel.

Liegt der Scheitelpunct eines Winkels in der Peripherie, so sind in Absicht auf seine Schenkel zwey Fälle möglich.

α. Der eine Schenkel ist Sehne, der andere Tangente des Kreises, wie (fig. 29.) AB und DB für den Winkel DBA. Zieht man Radien zu den Endpuncten

des von der Sehne abgeschnittenen Bogens, so ist, im gleichschenklichten Dreyecke ACB, $180^\circ - C = A + ABC$, mithin, da die Winkel an der Basis gleich sind, $90^\circ - \frac{1}{2} C = ABC$. Zieht man diesen Winkel von $CBD = 90^\circ$ ab, so bleibt $DBA = \frac{1}{2} C$. Da aber das Maaß des Winkels C der Bogen AB ist, so hat man den Satz, daß die Hälfte des Bogens, den eine Sehne abschneidet, das Maaß des Winkels darbietet, den sie mit einer durch ihren Anfangspunct gelegten Tangente bildet, $ABD = \frac{1}{2}$ Bog. AB.

β. Beyde Schenkel sind Sehnen, wie BA und BE (fig. 30.). Alsdann läßt sich die Bestimmung des Winkels selbst folgendermaaßen auf den vorigen Fall zurückführen. Man lege in seinem Scheitelpuncte eine Tangente, BD, an den Kreis. Jede der Sehnen macht mit ihr einen Winkel, der durch den halben Bogen, den, vom Berührungspuncte an gerechnet, die Sehne abschneidet, gemessen wird. Der Unterschied dieser Winkel ist derjenige, den die beyden Sehnen mit einander bilden; der Unterschied der beyden Bögen, welche die Sehnen abschneiden, das heißt, der zwischen ihnen enthaltene Bogen, AE, zur Hälfte genommen, muß also das Maaß jenes Winkels seyn. Man nennt einen Winkel, dessen Schenkel zwey, in der Peripherie zusammenstoßende Sehnen sind, einen Peripheriewinkel, der auf dem Bogen steht, welcher zwischen seinen Schenkeln enthalten ist. So lautet denn der vorige Satz: ein Peripheriewinkel wird durch die Hälfte des Bogens gemessen, auf dem er steht.

Als besonders wichtige Folgerungen aus diesem Satze gelten folgende.

1. Wenn ein Centriwinkel und ein Peripheriewinkel, wie (fig. 31.) ACB und ADB, über demselben Bogen stehn, so beträgt der letzte allemal nur die Hälfte des ersten. Der Centriwinkel kann, auf einem gegebenen Bogen oder seiner Sehne, nur auf eine einzige Art errichtet werden, der Peripheriewinkel auf unendlich mannichfaltige Weise, da er stets denselben Bogen zwischen seinen Schenkeln fassen kann, wenn auch sein Scheitelpunct allmälig durch alle Puncte des zweyten Bogens, der mit jenem, worauf er steht, die ganze Peripherie ausmacht, fortrückt.

2. Sind nur zwey Puncte der Peripherie, A und B (fig. 34.) gegeben, durch welche die Schenkel eines Peripheriewinkels gehn sollen, so ist dies auf zwey Arten möglich, indem der Peripheriewinkel seinen Scheitelpunct entweder in dem einen der beyden Bögen, in welche die Peripherie durch jene zwey ihr angehörige Puncte zerlegt wird, in D, oder in dem anderen, in E, erhalten kann. Solche Peripheriewinkel heißen sich gegenüberstehende; der eine ist immer Nebenwinkel des anderen, weil die Bögen, worauf sie stehen, und deren Hälften ihre Maaße darbieten, zusammen die ganze Peripherie ausmachen.

3. Alle Winkel, die auf einer Sehne stehn, wenn sie ihren Scheitelpunct zwischen Sehne und Bogen haben, sind größer, alle, deren Scheitelpunct nicht zwischen Sehne und Bogen liegt, sind kleiner als der Peripheriewinkel, welcher mit ihnen über derselben Sehne steht.

Im ersten Falle sey (fig. 32.) E der Scheitelpunct des angenommenen Winkels; jeder Schenkel desselben muß alsdann, rückwärts verlängert, die Peripherie schneiden, wie AE in D. Da AE also kleiner ist als AD, so muß der Winkel AEB größer als der Winkel ADB seyn.

Im zweyten Falle kann der Scheitelpunct F entweder so liegen, daß wenigstens einer seiner Schenkel, wie AF, den Bogen schneidet, und alsdann ist, weil AF größer als AD, der Winkel bey F kleiner als ADB; oder er kann, wie E (fig. 33.), so gestellt seyn, daß keiner seiner Schenkel eine Sehne ist. Dann sind im Dreyeck ADB die beyden Winkel an der Basis AB, beyde kleiner als die beyden Winkel an derselben Basis im Dreyeck AEB, folglich der an der Spitze, in diesem, bey E kleiner, als in jenem, bey D.

Daraus folgt offenbar, daß, sobald ein Winkel, D, einer gegebenen Linie, AB, gegenübergestellt werden soll, und die Möglichkeit vorhanden ist, einen Kreis über AB als Sehne zu beschreiben, und auf ihr stehend, einen Peripheriewinkel, so groß als der gegebene D, in demselben nachzuweisen, nur in der Peripherie dieses Kreises der Scheitelpunct des aufzustellenden Winkels D gefunden werden kann.

4. Die allgemeinere Aufgabe: jeder gegebenen Linie AB (fig. 31.) einen vorgeschriebenen Peripheriewinkel D gegenüberzustellen, und zu dieser Absicht Centrum und Radius des nöthigen Kreises zu finden, löst sich leicht auf folgende Art.

Ist der geforderte Winkel D kleiner als ein rechter, so trage man an den Enden von AB und über ihn,

zwey Winkel, CAB und CBA, jeden R — D, auf. Alsdann wird der Centriwinkel ACB = 2D, folglich der Peripheriewinkel ADB über demselben Bogen = D.

Ist der verlangte D ein stumpfer, so trage man (fig. 34.) an den Enden von AB und unter ihr, die Winkel CAB = CBA = D — R, auf. Alsdann wird ACB = 4R — 2D, also AEB = 2R — D, also ADB = D.

Ist endlich D = R, so beschreibe man über AB (fig. 35.) einen Halbkreis und jeder in ihm dem AB gegenüberstehende Peripheriewinkel, ADB, wird, halb so viel Grade als der Halbkreis, worauf er steht, enthaltend, ein rechter Winkel seyn.

5. Durch zweymalige Anwendung der Construction des vorigen Satzes kann sofort die Aufgabe erledigt werden: einen Punct zu finden, in welchem, wenn es überall möglich ist, von zwey, der Größe und Lage nach gegebenen, geraden Linien, jede einem bestimmten Winkel gegenübergestellt erscheint, indem man von ihm aus zu ihren Enden gerade Linien zieht. Gehn die beyden gegebenen geraden Linien von einem gemeinschaftlichen Puncte aus, so gibt es allemal einen solchen Scheitelpunct, welcher als Durchschnittspunct zweyer Kreise, deren jeder über einer gegebenen Sehne errichtet ist, gefunden wird.

6. Vermöge des le[illegible]en Satzes kann die Aufgabe: über einer gegebenen Hypotenuse, (fig. 35.) AB, ein rechtwinklichtes Dreyeck, für welches ein von den Perpendikeln, DA, gleichfalls gegeben ist, zu construiren, aufgelöst werden, ohne daß man dabey von einem zu-

vor gebildeten rechten Winkel auszugehn braucht. Man beschreibt über der Hypotenuse als Durchmesser einen Halbkreis; aus dem einen Endpuncte der Hypotenuse, A, mit dem gegebenen Perpendikel, DA, einen zweyten Kreis. Da, wo beyde einander schneiden, in D, liegt der Scheitelpunct des rechten Winkels, dessen zweyter Schenkel, DB, das Dreyeck vollendet.

7. Es ist die nemliche Construction, deren man sich zu bedienen hat, wenn man zwischen zwey gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionale, oder arithmetisch ausgedrückt, eine dritte finden will, so beschaffen, daß die zweyte Potenz der Zahl, wodurch sie ausgedrückt wird, so viel beträgt, als das Product aus den beyden Zahlen, welche, nach dem nemlichen Maaßstabe, die Größe jener beyden gegebenen Linien darstellen. Man trägt die gegebenen Linien, AE, EB, neben einander; beschreibt über ihrer Summe einen Halbkreis, und errichtet im Grenzpuncte, der die beyden Stücke seines Durchmessers scheidet, ein Loth, DE, auf ihm, welches die gesuchte Linie seyn wird. Der Grund dieses Verfahrens liegt in dem bekannten Satze, daß ein rechtwinklichtes Dreyeck durch ein Loth aus der Spitze des rechten Winkels in zwey kleinere ähnliche Dreyecke zerlegt wird, und in diesen, wegen der gleichen Verhältnisse ähnlich liegender Seiten, die eben ausgesprochene Beziehung statt findet:

$$\sqrt{(AE \, . \, EB)} = ED.$$

C. Excentrische Winkel.

Ein Winkel pflegt excentrisch zu heißen, wenn sein Scheitelpunct ins Innere des Kreises, aber nicht in dessen Centrum fällt, wie (fig. 36.) F als Scheitelpunct des Winkels AFG, oder seines Scheitelwinkels BFH. Schließt man alsdann die Schenkel desselben durch eine Sehne, AG, so entsteht ein Dreyeck, AGF, worin zwey Winkel, A und G, als Peripheriewinkel, durch Bögen gemessen werden können, mithin der dritte, bey F, auf gleiche Weise bestimmt werden kann. Alle Bögen, woraus die Peripherie besteht, machen, in Graden, 360° aus. Wenn aber von $180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$ $= \frac{1}{2}$ Bog. GA $+ \frac{1}{2}$ Bog. AH $+ \frac{1}{2}$ Bog. HB $+ \frac{1}{2}$ Bog. BG abgezogen wird

A $= \frac{1}{2}$ Bog. GB, und G $= \frac{1}{2}$ Bog. AH,

so bleibt als Werth des Winkels AFG übrig $= \frac{1}{2}$ Bog. AG $+ \frac{1}{2}$ Bog. BH, oder kürzer $\frac{AG + BH}{2}$. Das Maaß eines excentrischen Winkels im Kreise ist also das arithmetische Mittel aus den beyden Kreisbögen, die seine Schenkel vorwärts und rückwärts zwischen sich fassen.

Es ist bey Winkeln dieser Art eine merkwürdige Beziehung, daß allemal ähnliche Dreyecke entstehn, wenn ihre Schenkel und die ihrer Scheitelwinkel, durch Sehnen geschlossen werden. Die Dreyecke AFG und HFB haben H = A und G = B, als Peripheriewinkel, die über demselben Bogen stehn, sind mithin ähnlich. Es ist also BF : HF : BH = FG : AF : AG. Besonders interessant ist unter diesen Beziehungen:

BF : HF = FG : AF, oder in Zahlen ausgedrückt, BF . AF = FH . FG, wo bloß von den Abschnitten die Rede ist, in welche zwey sich kreuzende Sehnen zerfallen.

D. Winkel außerhalb des Kreises.

Es sind bey einem Winkel, dessen Scheitelpunct außerhalb der Peripherie liegt, in Absicht auf die möglichen Lagen seiner Schenkel gegen dieselbe, mehrere Fälle zu unterscheiden.

a. Sein einer Schenkel wird eine Sehne, der andere eine Tangente, wie MGK (fig. 37.). Verbindet man, wie vorhin, beyde Schenkel durch eine Sehne, so entsteht ein Dreyeck, KGM, worin zwey Winkel, bey K und M, weil ihre Scheitelpuncte in die Peripherie fallen, durch Kreisbögen bestimmt werden können, folglich auch der dritte bey G.

Das Maaß des Winkels GKM ist ½ Bog. NM; das Maaß von GMK ist ½ Bog. MLK. Werden beyde von 180° oder der halben Peripherie = ½ Bog. MLK + + ½ Bog. M . K abgezogen, so bleibt für den Winkel KGM = ½ Bog. MK — ½ Bog. NM. Hier ist es also die halbe Differenz der beyden Kreisbögen, welche, der eine auswärts, der andere einwärts, zwischen die Schenkel des Winkels fallen, die das Maaß desselben darbietet.

Auch hier ist es merkwürdig, daß die Dreyecke, welche entstehn, wenn aus dem Endpuncte der Tangente GM, zu den Grenzpuncten der Sehne NK Linien gezogen werden, GMK und GMN ähnlich aus=

fallen müssen, welches, da sie den Winkel bey G gemein haben, daraus folgt, daß MKG in dem einen, und GMN in dem anderen den nemlichen Bogen NM zwischen ihren Schenkeln enthalten. Es gelten also von ihnen die Beziehungen, daß GM : GN : MN = GK : GM : MK, unter denen besonders der Satz GM : GN = GK : GM, arithmetisch ausgedrückt, $GM^2 = GN \cdot GK$, wichtig ist.

Verbindet man die Endpuncte der entstandenen Sehnen (fig. 38.) in natürlicher Ordnung, so entstehn Dreyecke, GNO, GKH, die sich ähnlich sind, da G beyden gemein ist, und GNO sowohl als H, beyde Nebenwinkel von ONK, einander gleich sind. Daraus ergibt sich GN : GO : ON = GH : GK : KH.

Verbindet man (fig. 39.) die Endpuncte der Sehnen kreuzweis, so entstehn wiederum Dreyecke, GKO, GNH, die ähnlich seyn müssen, da G beyden angehört, K und H, über dem nemlichen Bogen ON stehend, gleich sind. Daher ist GH : GN : NH = GK : GO : KO. Unter den Sätzen, die in diesen Ausdrücken zusammengefaßt sind, ist der jedenfalls gültige GN : GO = GH : GK, oder arithmetisch gefaßt $GN \cdot GK = GO \cdot GH$, besonders bemerkenswerth.

b. Beyde Schenkel schneiden den Kreis so, daß Stücke von ihnen als Sehnen erscheinen, wie HGK (fig. 37.). Dieser Fall kommt unmittelbar auf den vorigen zurück. Das Maaß von KGM ist

$$= \frac{MK - NM}{2}.$$

Ebenso das Maaß von HGM = $\frac{HKM - ONM}{2}$

Folglich abgezogen HGK = $\frac{HK - ON}{2}$.

c. Beyde Schenkel sind Tangenten, wie bey dem Winkel LGM (fig. 37.). Auch hier erfolgt, aus nochmaliger ungeänderter Wiederholung der ersten Betrachtung, daß das Maaß des Winkels

LGM = $\frac{\text{Bog. } LHKM - \text{Bog. } LONM}{2}$ seyn müsse.

Allgemein gilt also für jeden Winkel, dessen Scheitel außer der Peripherie liegt, und dessen Schenkel sie erreichen, daß die halbe Differenz der Bögen, die, der eine auswärts, der andere einwärts gewendet, zwischen seine Schenkel fallen, in Graden ausgedrückt, sein Maaß darbieten muß.

E. Parallelen und Kreisbogen.

Wenn Parallelen eine Kreisperipherie durchschneiden, so sind die Bögen, welche sie zwischen sich fassen, gleich unter einander.

Sind (fig. 40.) AE und BD parallel, so müssen die Winkel DBE und AEB, also auch die Bögen AB und DE, auf denen sie als Peripheriewinkel stehn, gleich seyn.

Ist eine von ihnen Tangente des Kreises, wie FGH, so ergibt auf gleiche Art, die Identität der Winkel HGE und AEG, daß die Bögen AG und GE gleich seyn müssen.

Daß alle Sätze, welche den Zusammenhang unter Winkeln und Kreisbögen zwischen ihren Schenkeln be-

treffen, einer Umkehrung fähig sind, ergibt sich aus den für sie geführten Beweisen sogleich.

III. Rectification des Kreises.

Die Frage nach der Länge der Kreislinie, oder einzelner bestimmter Theile derselben ist in vielfacher Beziehung von großer Erheblichkeit.

Den Kreis rectificiren heißt: die Länge der Kreislinie mit der einer beliebigen geraden Linie, am natürlichsten der des Radius oder Durchmessers, vergleichen. Wäre die Kreislinie selbst gerade, oder aus geraden Linien zusammengesetzt, so bedürfte die Möglichkeit einer solchen Vergleichung keiner Begründung, obgleich alsdann keinesweges behauptet werden dürfte, daß ihr Resultat sich in einer bestimmten, völlig genauen Zahl darstellen ließe. Der pythagorische Lehrsatz beweist es, daß nicht immer gerade Linien als Zusammensetzungen aus einem und demselben Grundtheile angesehn werden können, daß sich also ihr Verhältniß oft nicht mit völliger Schärfe angeben läßt. Aber die Möglichkeit des Messens der einen durch die andere ist in sofern beyde selbst als aus kleineren geraden Linien zusammengesetzt gedacht werden dürfen, und es nur darauf ankommt, ob sie sich beyde durch Wiederholung einer kleineren geraden Linie erschöpfen lassen, keinem Bedenken unterworfen. Wenn hingegen eine krumme Linie mit einer geraden verglichen werden soll, so stellt die verschiedenartige Natur beyder der unmittelbaren Vergleichung unübersteigliche Hindernisse in den Weg. Man zerlege die gerade Linie in noch so viele kleinere, es sind immer noch gerade Linien; man lasse die krumme in

noch so viele gleiche Theile zerfallen, jeder von ihnen wird krumm bleiben, weil es der Begriff der krummen Linie mit sich führt, daß kein Theil von ihr gerade seyn kann.

A. Princip und Gang der Untersuchung.

1. Es ist allenthalben, wo Größen nicht als verschiedene Zusammensetzungen congruenter Grundbestandtheile betrachtet werden können, ein indirectes Verfahren bey ihrer Vergleichung, und ein besonderes Princip, wodurch sich ein solches begründet, erforderlich. Da in der Elementargeometrie nur von einer einzigen krummen Linie ausnahmsweise gehandelt werden soll, so genügt es, ein solches Princip gleichfalls nur in Beziehung auf diese einzige krumme Linie specialisirt auszusprechen, und weitere Expositionen desselben ins Gebiet der höheren Geometrie zu verweisen, wo namentlich die Frage: ob nicht überhaupt die Rectification krummer Linien immer hypothetisch bleibe, zur Erörterung kommen muß.

Das Princip, worauf in den Elementen die Rectification des Kreises gegründet wird, ist das folgende.

Nimmt man in einem Kreise (fig. 41.) einen Bogen, AB, so ist seine Länge größer als die der Sehne, welche seine Endpuncte verbindet. Legt man aber durch diese Endpuncte zwey Tangenten, AD, DB, bis zum Zusammenstoßen verlängert, so ist der Zug, welchen sie zwischen eben jenen Puncten darstellen, AD + BD, größer als der Kreisbogen.

2. In Folge dieses Princips zerlegt man die Peripherie eines Kreises in beliebige kleinere, am bequemsten in gleiche Theile; zieht für jeden Bogen eine Sehne, und legt durch seine Enden zusammenstoßende, und sich so gegenseitig begrenzende Tangenten; bestimmt die Länge dieser Sehnen, und jener Tangenten: die Summe aller Sehnen gibt weniger, die Summe aller Tangenten mehr, als die Kreislinie an Länge betragen kann; man erhält also Grenzen, zwischen denen sie enthalten ist.

Dieses Verfahren würde aber sehr unvollkommen und unwissenschaftlich seyn, wenn die Zerfällung der Peripherie in gleiche Theile durch mechanische Proben; das Messen der Sehnen und Tangenten durch empirische Vergleichung mit dem Radius oder Durchmesser geschehen sollte. Es würde zu wenig befriedigenden Resultaten führen, wenn sich nicht darthun lassen sollte, daß die Grenzen, welche es für die Peripherie des Kreises ergibt, sich so nahe als man will, zusammenrücken lassen. Man muß also suchen: Zerfällungen der Peripherie in gleiche Theile nach sicheren Regeln; Berechnungen der Größe, die den Sehnen und Tangenten dieser einzelnen Theile angehören; und die Gewißheit, daß bey dem Einschließen eines Kreisbogens zwischen Sehnen und Tangenten, eine fortschreitende, beliebig weit zu treibende, Näherung im Zusammenziehn jener Grenzen gestattet ist, in seine Gewalt zu bekommen.

B. Theilung der Peripherie in gleiche Theile.

Was zuerst die Theilung der Peripherie in kleinere, unter einander gleiche Theile betrifft, so hat zwar die

Elementargeometrie keine allgemeine constructive Methode, um jede beliebig verlangte Anzahl von solchen hervorzubringen. Wenn es aber bloß darauf ankommt, durch bestimmte Construction eine Menge gleicher Theile in der Peripherie zu erhalten, größer als irgend eine beliebig angenommene Zahl, so läßt sich zu dieser Absicht ein sehr einfaches Verfahren angeben.

1. Einige Theilungen der Peripherie stehn sogleich zu Gebote. Man setze durch das Centrum des Kreises zwey Durchmesser senkrecht auf einander; sie werden die Peripherie in vier gleiche Theile zerlegen. Noch leichter kann die Zerfällung derselben in sechs gleiche Theile erhalten werden. Es sey (fig. 41.) der Bogen AB ein Sextant. Alsdann ist der ihm zugehörige Winkel am Mittelpuncte $\frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$. In dem Dreyecke, welches seine Sehne mit den Radien durch ihre Enden bildet, ABC, ist also die Summe der beyden Winkel, die an der Sehne liegen, $= 180° - 60° = 120°$. Sie sind gleich unter einander, weil das Dreyeck ein gleichschenklichtes ist; jeder einzelne von ihnen beträgt also auch 60°, und das Dreyeck ist gleichseitig, weil es lauter gleiche Winkel in sich faßt. Der Radius des Kreises selbst ist gleich der Sehne eines Bogens, welcher den sechsten Theil der Peripherie beträgt.

Auch die Theilung der Peripherie in zehn gleiche Theile, ergibt sich aus bereits entwickelten Beziehungen. Ist (fig. 23.) der Winkel $ABC = \frac{4}{10} R = \frac{2}{5} R$, und $AB = BC = r$, also AC Sehne eines Bogens, der $\frac{1}{10}$ der Peripherie beträgt, so hat man (S. 245, 6.)

$$\frac{AB}{AC + AB} = \frac{AC}{AB}, \text{ oder wenn } AC = x \text{ ist,}$$

$$\frac{r}{r + x} = \frac{x}{r}, \text{ oder } r^2 = x(r + x).$$

Man errichte also im Endpuncte eines Radius CG $= \frac{1}{2}r$ (fig. 42.) das Loth GE $= r$, ziehe zu seinem Endpuncte, CE, so wird der außerhalb des Kreises fallende Theil dieser Linie, AE, die gesuchte Sehne $= x$ seyn. Denn es ist (S. 266, b.) $GE^2 = AE \cdot EK$, also, da $AK = r$, $GE = r$, wenn $AE = x$ gesetzt wird, $r^2 = x(r + x)$. Arithmetisch gefaßt erhielte man

$$AE = CE - CA = \sqrt{(CG^2 + GE^2)} - CA = r\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right).$$

2. Hat man erst einen Bogen, der ein aliquoter Theil der Peripherie ist, so kann man von ihm zu anderen gelangen, die, halb so groß als er, es gleichfalls seyn müssen. Es sey (fig. 42.) AB ein solcher Bogen. Ein Loth aus dem Centrum auf seine Sehne, CFG, halbirt bekanntlich die Sehne, den Winkel am Mittelpuncte, welcher ihr gegenübersteht, und folglich auch den Bogen, welchen dieser zwischen seine Schenkel faßt. Es ist also der Bogen AG, oder GB, halb so groß, als der anfängliche, AB, war.

Da eine solche Halbirung so oft, als man will, vorgenommen werden kann, so ist die Möglichkeit, den Umfang des Kreises in eine Menge gleicher Theile zu zerfällen, welche jede bestimmt angenommene Zahl noch übertrifft, keinem Zweifel unterworfen.

C. Berechnung von Sehnen und Tangenten.

Die beabsichtigte Einschließung der Peripherie zwischen bestimmbare Grenzen erfordert nicht allein die Nachweisung einer sicheren Regel, wodurch Theilung der Peripherie in gleiche Theile, so daß erforderlichen Falls die Menge derselben jede beliebige, bestimmt angenommene Zahl übertrifft, geleistet werden kann; man muß, um sie zu bewürken, auch die Sehnen der dadurch entstandenen Bögen, nebst den aus ihren Enden gezogenen, sich einander begegnenden Tangenten, der Größe nach, und zwar durch Rechnung, die ihr Verhältniß gegen den Radius des Kreises ausdrückt, zu bestimmen im Stande seyn.

a. Berechnung der Sehnen.

1. Daß im Allgemeinen die Größe der Sehne mit der des Bogens zusammenhängt, folgt daraus, daß sie Basis eines gleichschenklichten Dreyecks ist, dessen Winkel an der Spitze den Centriwinkel ihres Bogens darstellt. Sie muß deswegen für den kleineren Bogen geringer, für den größeren beträchtlicher ausfallen, und ist fähig, alle Werthe zwischen 0 und 2r (r als Radius des Kreises gedacht) anzunehmen.

2. Daß sich die Größe einer Sehne, und die Größe ihres Abstandes vom Centrum, in einem gegebenen Kreise wechselseitig bestimmen, ergibt sich sogleich aus dem bekannten Satze, daß die Sehne durch ein Loth aus dem Centrum halbirt wird, und also ihre Hälfte mit diesem Lothe und dem Radius ein rechtwinklichtes

Dreyeck bildet, weswegen den Radius r, die Sehne s, ihren Abstand vom Centrum d genannt, $r^2 = \frac{1}{4}s^2 + d^2$ seyn muß. Diese Beziehung thut zugleich dar, daß die größere Sehne den kleineren Abstand vom Centrum haben muß, und umgekehrt; so wie, daß der doppelte Radius oder Durchmesser die höchste Länge abgibt, die eine Sehne erhalten, und daß jede noch so kleine Linie Sehne eines Kreises werden kann.

3. Die Sehne AB hat (fig. 44.) in ihrer Mitte den größten Abstand von dem Kreisbogen AED, welchen sie, abwärts vom Centrum, abschneidet. Steht CDE lothrecht auf AB, so ist CF > CD, mithin, beyde vom Radius abgezogen, GF < DE. Um so mehr also, da das Loth GH < GF seyn muß, GH < DE.

Je kleiner die Sehne gegen den Radius wird, ein um desto kleinerer Theil ihrer eigenen Länge wird ihr größter Abstand von dem Kreisbogen, den sie abwärts vom Mittelpuncte abschneidet.

Denn, AB = s, den Radius = r gesetzt, ist $CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$, welches, sobald $s < r$ ist, größer wird als $r - \frac{s^2}{4r}$ *). Mithin gibt CE — CD d. h. DE weniger als $r - \left(r^2 - \frac{s^2}{4r}\right) = \frac{s^2}{4r}$. Es ist also DE stets geringer als $s \cdot \frac{s}{4r}$, oder $r = 1$ ge-

*) Denn $\left(r - \frac{s^2}{4r}\right)^2$ ist $= r^2 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{16r^2}$, welches von $r^2 - \frac{1}{4}s^2$ abgezogen, als Rest $\frac{s^2}{4} - \frac{s^4}{16r^2} = \frac{s^2}{4}\left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)$, einen positiven echten Bruch, zurückläßt.

setzt, geringer als $s \cdot \frac{s}{4}$. Wäre also $s = \frac{1}{n}$, und $\frac{1}{n}$ so gering, daß $\frac{1}{n}$ von ihm selbst, wegen zu großer Kleinheit nicht mehr in sinnlicher Anschauung erkennbar seyn könnte, so wäre offenbar, da jeder Punct des Bogens einen geringeren Abstand von der Sehne haben würde als $s \cdot \frac{1}{4} s = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4n}$, kein Punct des Bogens von dem lothrecht unter ihm gelegenen der Sehne zu unterscheiden seyn, es würden also in sinnlicher Anschauung Bogen und Sehne zusammenfallen.

4. Die Aufgabe, zu jedem Bogen, von welchem angegeben worden, der wievielste Theil der Peripherie er sey, die Länge der zugehörigen Sehne zu finden, ist nicht lösbar für die Elementargeometrie im Allgemeinen, aber wohl in unzählig vielen einzelnen Fällen. Für den Zweck der beabsichtigten Untersuchung genügt es, auch nur für einen Bogen, der ein aliquoter Theil der Peripherie ist, die Sehne zu kennen, wie z. B. für den Quadranten, wo sie $r \cdot \sqrt{2}$, oder den Sextanten, wo sie r ist. Wofern sich alsdann eine allgemeine Methode ausfindig machen läßt, vermöge deren aus der schon bekannten Sehne eines Bogens, die eines andern, der genau die Hälfte des vorigen beträgt, berechnet werden kann, so ist die Möglichkeit gegeben, für unendlich viele, immer kleiner werdende Bögen, die Größe der ihnen zugehörigen Sehnen genau zu bestimmen.

Es sey AB (fig. 42.) die gegebene Sehne; die Zahl, wodurch ihre Größe, den Radius = r angenom-

men, ausgedrückt wird, = s. Alsdann hat man zuerst ihren Abstand vom Mittelpuncte, $CF = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$, und daraus $FG = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$; mithin in dem rechtwinklichten Dreyecke, welchem die Sehne des halben Bogens, AG, zur Hypotenuse dient, beyde Perpendikel. Aus ihnen kann wieder vermöge des pythagorischen Lehrsatzes die Hypotenuse AG berechnet werden. So findet sich, nach gehöriger arithmetischer Zusammenziehung: $AG = \sqrt{2r(r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)})}$, und dies ist die Formel, durch deren Hülfe man aus der Sehne irgend eines beliebigen Bogens = s, die eines anderen, AE, welcher halb so groß ist als jener erste, berechnen kann.

Geht man nun bey dem Gebrauche dieser Formel von einem Bogen aus, der selbst schon ein aliquoter Theil der Peripherie ist, z. B. dem Sextanten, so werden alle die übrigen Bögen, deren Sehnen sich nach ihr allmälig eine aus der andern berechnen, gleichfalls aliquote Theile der Peripherie, nur von immer höher werdender Vielfachheit seyn.

5. Wenn es darauf ankommt, die Berechnung der Sehnen in stetem Fortschritte durch Bögen, deren jeder die Hälfte des vorhergehenden ist, zu erleichtern, so dient dazu der nachfolgende Satz.

Die Sehne des Bogens, der mit einem gegebenen die halbe Peripherie ausmacht, mag die Nebensehne des letzteren heißen. Es ist offenbar, daß die Quadrate der Sehne und Nebensehne eines Bogens (fig. 43.) wie $BE^2 + AE^2$ zusammen das des Durchmessers ausmachen.

Ist nun die Sehne des ganzen Bogens, BE = s, so ist seine Nebensehne AE = $\sqrt{(4r^2 - s^2)}$; die Sehne des halben Bogens, DB = $\sqrt{(2r^2 - 2r \cdot \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)})}$; die Nebensehne desselben also AD = $\sqrt{(AB^2 - BD^2)} = \sqrt{(2r^2 + 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)})}$; es ist mithin AD = $\sqrt{(2r^2 + r \cdot AE)} = \sqrt{r \cdot (2r + AE)}$. Da man bey der würklichen Ausführung r = 1 nimmt, so ergibt sich, um aus der Nebensehne des ganzen Bogens AE, die seiner Hälfte, BD, zu finden, die Regel: AD = $\sqrt{(2 + AE)}$, welcher gemäß das Fortschreiten durch Nebensehnen um sehr Vieles leichter ist, als das durch die Sehnen selbst. Erst bey dem Schlusse der Arbeit wird man aus der letzten Nebensehne die ihr zugehörige Sehne selbst zu bestimmen haben.

b. Berechnung der Tangenten.

1. Was die Berechnung der Tangenten betrifft, die, an die Endpuncte eines Kreisbogens gelegt, und sich im Zusammenstoßen gegenseitig begrenzend, einen längeren Zug als der Bogen selbst darstellen, so ist dieselbe weit geringeren Schwierigkeiten unterworfen. Die beyden an den Enden eines Bogens AGB (fig. 42.) angelegten Tangenten, AD, BD, bilden mit der Sehne AB ein gleichschenklichtes Dreyeck, weil sie gleiche Winkel (beyde gemessen durch die Hälfte des Bogens AGB) mit ihr einschließen. Das Loth auf die Sehne, CF, geht also durch die Spitze dieses Dreyecks, und stiftet ein neues, CAD, welchem dasjenige, welches entsteht, wenn man in der Mitte des Bogens eine Tangente GE anlegt, und sie mit einer Radiusrichtung durch den

Anfangspunct, CAE schneidet, identisch ist, da beyde den Winkel bey C gemein haben, und CA = CG ist. Man darf also statt AD setzen GE, statt BD auf gleiche Art GH; statt AD + BD also EH.

Wenn also in der Mitte eines Kreisbogens AGB, eine Tangente an ihn gelegt, und von Radiusrichtungen durch seine Endpuncte, CBE, CAD, begrenzt wird, so beträgt die Länge dieser Tangente mehr als die des Kreisbogens, und sie kann aus der einen Sehne AB leicht auf folgende Art erhalten werden.

Es sey der Bogen AGB ein aliquoter Theil der Peripherie, und dessen Sehne, AB, so wie der Abstand derselben vom Centrum, CF, schon berechnet. Legt man nun durch die Mitte des nemlichen Bogens eine Tangente, die sich zwischen den durch die Enden der Sehne gezogenen verlängerten Radien begrenzt, EH, so ergibt sich die Aehnlichkeit der Dreyecke, die diese parallelen Transversalen zwischen den Schenkeln ebendesselben Winkels bilden. Die Tangente wird also in eben dem Maaße mehr betragen als die Sehne, wie ihr Abstand vom Centrum größer ist als der jener Sehne selbst. Nun ist ihr Abstand vom Centrum der Radius; der der Sehne ist $\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}$; die Länge der Tangente ist also

$$EH = AB \cdot \frac{CG}{CF} = \frac{r \cdot s}{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}} = \frac{s}{\sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{4 r^2}\right)}}.$$

Berechnet man fortlaufend nicht die Sehnen, sondern die Nebensehnen, um erst aus der letzten Nebensehne zu der ihr zugehörigen Sehne zurückzukehren, so hat man nicht nöthig, deren Abstand vom Centrum zu

suchen; er ist die Hälfte der Nebensehne. Denn (fig. 43.) $CF = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$ ist die Hälfte von $AE = \sqrt{(4r^2 - s^2)}$.

2. Nimmt man den anfänglichen gebrochenen Tangentenzug $AD + DB = 2AD$, so ist klar, daß die höchste Entfernung, welche irgend einer der ihm angehörigen Puncte von der Sehne AB haben kann, DF ist. Die Aehlichkeit der Dreyecke CAF und AFD ergibt sogleich $\frac{FD}{AD} = \frac{AF}{CA}$, oder, da $2AD = t$, $CA = r$, $AF = \frac{1}{2}s = FD = \frac{s}{4r} \cdot t$. In eben dem Maaße also, in welchem die Sehne ein kleinerer Theil des Radius wird, muß auch der höchste Abstand, den irgend ein Punct in dem über ihr stehenden Tangentenzuge von ihr erhalten kann, verhältnißmäßig gegen die Länge dieses Zuges abnehmen.

Es kommen also der Bogen und der Tangentenzug, beyde dem räumlichen Zusammenfallen mit der Sehne desto näher, je kleiner die Sehne ist.

D. Möglichkeit beliebiger Näherung.

1. Wenn es nur darauf ankäme, irgend zwey Grenzen, zwischen denen die Länge der Peripherie nothwendig enthalten seyn müßte, anzugeben, so wäre dieses auf viele Arten möglich. Man nähme irgend einen Bogen, welcher ein aliquoter Theil der Peripherie ist, und berechnete für ihn Sehne und Tangente. Diese beyden Zahlen, so oft genommen, als der Bogen in

der Peripherie enthalten ist, würden die beyden gefoderten Grenzen hervorbringen.

Der erste Anfang der würklichen Grenzbestimmung wird auf solche Art am leichtesten gemacht, wenn man von dem Sextanten ausgeht. Für ihn ist bekanntlich die Sehne $s = r$, die Tangente also $= \frac{r}{\sqrt{(1 - \frac{s^2}{4r^2})}} = r\sqrt{(4/3)}$. Es fällt also die Länge der Peripherie zwischen $6r$ und $6 \cdot \sqrt{(4/3)}\, r$, oder in ganzen Zahlen, zwischen $6r$ und $7r$.

Daraus folgt, die Länge der Peripherie $= P$ gesetzt, daß die Länge eines Bogens, der $\frac{1}{n} P$ ist, weniger als $\frac{7r}{n}$ beträgt. Um so mehr ist also die Sehne des Bogens $\frac{1}{n} P$ geringer als $\frac{7r}{n}$.

2. Daß die Grenzen, welche sich für die Länge der Peripherie ergeben, wenn man sie in n gleiche Theile zerlegt, und für den einzelnen sowohl die Sehne s, als die Tangente t berechnet, um ns als zu wenig, nt als zu viel aufzustellen, so eng als man will, zusammengezogen werden können, beweist folgende Betrachtung.

Da $t = \frac{s}{\sqrt{(1 - \frac{s^2}{4r^2})}}$, so ergibt eine leichte Rechnung, daß t jederzeit kleiner wird als $s + \frac{s^3}{6r^2}$, so-

halb $\frac{s}{r}$ ein echter Bruch ist *). Aber, sobald n größer als 6 genommen worden, ist $\frac{s}{r}$ unfehlbar ein solcher.

Ist nun t stets größer als s, aber kleiner als $s + \frac{s^3}{6r^2}$, so fällt die Länge der Peripherie zwischen die Grenzen ns und $ns + n\frac{s^3}{6r^2}$, oder zwischen ns und $ns\left(1 + \frac{s^2}{6r^2}\right)$. Es ist bekannt, daß mit zunehmendem n die Sehne s zu jeder noch so geringer Kleinheit herab, mithin $1 + \frac{s^2}{6r^2}$ der Einheit so nahe

*) Denn s^2 ist kleiner als $\left(s + \frac{s^3}{6r^2}\right)^2 \left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)$, woraus, auf beyden Seiten durch $\left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)$ dividirt, und die Wurzel gezogen, $\frac{s}{\sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)}} < s + \frac{s^3}{6r^2}$ folgt. Es ist nemlich $\left(s + \frac{s^3}{6r^2}\right)^2 \left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right) = s^2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{s^4}{r^2} - \frac{1}{18} \cdot \frac{s^6}{r^4} - \frac{1}{144} \cdot \frac{s^8}{r^6} = s^2 + \frac{s^4}{12r^2}\left(1 - \frac{s^2}{3r^2}\left(2 + \frac{s^2}{4r^2}\right)\right)$. Sobald $\frac{s}{r}$ ein echter Bruch ist, wird $\left(2 + \frac{s^2}{4r^2}\right) : 3$, mithin $\frac{s^4}{12r^2}\left(1 - \frac{s^2}{3r^2}\left(2 + \frac{s^2}{4r^2}\right)\right)$ ein positiver echter Bruch, mithin gibt die Addition der letztgenannten Größe zu s^2 mehr als s^2 selbst ist.

als man will, gebracht werden kann; es würde auch daraus folgen, daß s kleiner ist als $\frac{7r}{n}$, mithin $\frac{s^2}{6r^2}$ kleiner als $\frac{1}{6}.\left(\frac{7}{n}\right)^2$, folglich $1 + \frac{s^2}{6r^2}$ kleiner als $1 + \frac{1}{6}.\left(\frac{7}{n}\right)^2$, welches, da $\frac{1}{6}.\left(\frac{7}{n}\right)^2$ mit wachsendem n so gering als man will, werden kann, sich der Einheit beliebig nahe rücken läßt, um so mehr also auch $1 + \frac{s^2}{6r^2}$, welches jederzeit noch geringer ist.

Man hat diesem gemäß eigentlich nicht nöthig, zu jedem s das zugehörige t zu berechnen, wenn man die Peripherie zwischen Grenzen einschließen will, da aus $\frac{s}{r}$ sogleich $1 + \frac{s^2}{6r^2}$ abgeleitet, und so aus der ersten Grenze ns, die zweyte, ns $\left(1 + \frac{s^2}{6r^2}\right)$ gefunden werden kann. Indessen berechnet sich $nt = \frac{ns}{\sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)}}$ im Zusammenhange fast eben so leicht, und rückt dem gesuchten P etwas näher *).

*) Es ist schon bewiesen, daß $1 + \frac{s^2}{6r^2} > \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)}}$

Ebenso leicht zeigt sich im Gegensatz, daß
$1 + \frac{s^2}{8r^2} < \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right)}}$ seyn muß, da

3. Wenn für jeden Kreis, sofern derselbe mit einem besonderen Radius beschrieben ist, die Länge der Peripherie durch allmälige Grenzbestimmungen der im Obigen entwickelten Art ursprünglich gefunden werden müßten, so bliebe die Rectification des Kreises eine weitschichtige Aufgabe.

Es ergibt sich aber als eine leichte Folge aus der bisherigen Betrachtung das Theorem, daß sich die Peripherien zweyer Kreise, P und p, in Absicht auf die Länge, wie die Radien, womit sie beschrieben sind, R und r, verhalten.

Ist jede beyder Peripherien in n gleiche Theile zerlegt, und die Sehne von einem solchen, für den Radius R, = S, für den Radius r aber = s, so wird unfehlbar $\frac{S}{s} = \frac{R}{r}$ seyn, da s und S als Grundlinien ähnlicher Dreyecke, deren Schenkel r und R sind, angesehn werden können.

Nun fällt P zwischen nS und $nS + \frac{nS^3}{6R^2} =$

$$\left(1 + \frac{s^2}{8r^2}\right)^2 \left(1 - \frac{s^2}{4r^2}\right) = 1 - {}^3/_{64}\, s^4 - {}^1/_{256}\, s^6,$$

also, wenn s ein echter Bruch seyn soll, unfehlbar selbst ein positiver echter Bruch ist. Wenn also nt stets kleiner ist als $ns\left(1 + \frac{s^2}{6r^2}\right)$, so wird es dabey unfehlbar stets größer bleiben als $ns\left(1 + \frac{s^2}{8r^2}\right)$. Es kann also nur unbedeutenden Unterschied machen, ob man als obere Grenze $ns\left(1 + \frac{s^2}{6r^2}\right)$ oder nt gebrauchen will.

$nS\left(1+\frac{S^2}{R^2}\right)$ oder, zwischen nS und $nS(1+U)$, wenn man der Kürze wegen $\frac{S^2}{6R^2}=U$ setzt, wo offenbar U eine Größe bedeutet, die mit zunehmendem n unter jede Kleinheitsgrenze sinken kann. Auf gleiche Weise fällt p zwischen ns und $ns(1+u)$, wenn $u=\frac{s^2}{6r^2}$, wo u gleichfalls mit steigendem n unter jeden noch so kleinen bestimmten Werth herabkommen kann.

Es liegt also $\frac{P}{p}$ zwischen $\frac{nS}{ns(1+u)}$ und $\frac{nS(1+U)}{ns}$, d. h. zwischen $\frac{S}{s}\left(\frac{1}{1+u}\right)$ und $\frac{S(1+U)}{s}$, oder da $\frac{S}{s}=\frac{R}{r}$, zwischen $\frac{R}{r}\left(\frac{1}{1+u}\right)$ und $\frac{R}{r}(1+U)$. Nun ist offenbar $1-u$ kleiner als $\frac{1}{1+u}$, mithin $\frac{R}{r}\left(\frac{1}{1+u}\right)$ größer als $\frac{R}{r}(1-u)$; es liegt also $\frac{P}{p}$ um so mehr zwischen $\frac{R}{r}(1-u)$ und $\frac{R}{r}(1+U)$. Es kann also nicht von $\frac{R}{r}$ um irgend eine bestimmte Größe verschieden seyn. Denn setzte man $\frac{R}{r}(1+\alpha)$, wo α irgend eine bestimmte Größe seyn mögte, so wäre dieses unstatthaft, da $\frac{P}{p}$ stets kleiner ist als $\frac{R}{r}(1+U)$, wobey U nach Belieben tief, also auch unter α herabsinken

kann. Setzte man $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}(1 - \alpha)$, so wäre auch dieses unzulässig, da es stets größer ist als $\frac{R}{r}(1 - u)$, welches so nahe an $\frac{R}{r}$ rücken kann als man will, während $\frac{R}{r}(1 - \alpha)$ um ein Bestimmtes kleiner als $\frac{R}{r}$ bleiben müßte. Es kann also $\frac{P}{p}$ nur $= \frac{R}{r}$ seyn.

Ist daher nur für irgend einen Radius die Länge der Peripherie berechnet, so hat man sie für jeden anderen, weil sie dem Radius proportional ist.

Jetzt also ist der Gang und die Würkung der ganzen Berechnung völlig klar. Man geht von einem Bogen aus, der ein bekannter aliquoter Theil der Peripherie ist, und dessen Sehne man kennt (am einfachsten von dem sechsten Theile der Peripherie, dessen Sehne der Radius ist). Man berechnet, den Radius des Kreises als Einheit annehmend, seine Sehne, und auch die zugehörige Tangente. Diese beyden Zahlen, so oft genommen, als jener Bogen in der Peripherie enthalten ist, geben die erste Probe von Grenzen, zwischen denen dieselbe liegen muß. Man kann, vermöge einer sich immer gleich bleibenden Formel, den vorhergehenden Bogen halbirend, und aus seiner Sehne die des neuen Bogens berechnend, ins Unendliche fortgehn; dabey zugleich aus jeder Sehne die ihr zugehörige Tangente bestimmen, welches Letzte jedoch nur für den Fall, daß man die Untersuchung schließen, und die erreichten Gren-

zen zu einer genäherten Zahl zusammenziehn will, nöthig ist. Sehne und Tangente, beyde mit der Zahl multiplicirt, welche angibt, wie oft ihr Bogen in der Peripherie enthalten ist, geben die gesuchten Grenzen, von denen die eine Etwas kleineres, die andere Etwas größeres als die Peripherie darstellt; die in sofern, als sie unter einander zusammenstimmen, mit völliger Sicherheit auch die Länge der Peripherie bezeichnen werden, und von denen es streng bewiesen ist, daß im Fortgange des Verfahrens ihr Unterschied geringer als jede noch so kleine Zahl werden kann, vermöge deren man also der Peripherie so nahe zu kommen vermag, als man will.

E. Resultat der nähernden Bestimmung.

1. Man hat nach diesen Principien die Näherung weiter getrieben *), als in irgend einer Anwendung

*) Der Anfang dieser mühsamen Rechnung gibt folgende Resultate, wobey, herkömmlich, der Durchmesser = 1 gesetzt ist.

n	ns	nt
6	3	3,464101
12	3,105828	3,215390
24	3,132628	3,159660
48	3,139350	3,146086
96	3,141031	3,142714
192	3,141452	3,141873
384	3,141557	3,141663
768	3,141583	3,141610
1536	3,141590	3,141597
3072	3,141592	3,141598.

Man kann schon aus diesen wenigen Zahlen sehen, wie langsam die Näherung ist, die der Lauf der Rechnung gestattet. Es würde eine unerträgliche Weitläuftigkeit geben, wenn

gefordert werden könnte. Die Zahl, welche die Länge des Umfangs in Beziehung auf den Durchmesser angibt, d. h. diejenige, womit man den Durchmesser multipliciren muß, um den Umfang zu erhalten, wird beständig durch das Zeichen π angedeutet, und ist, nach der schärfsten, jetzt bekannten Bestimmung, folgende:

$$\pi = 3{,}141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279502884\ 19716939937510582097494459230781640628\ 6208\ 998628034825342117067982148086513\ 28230664709384460955058223172535940812\ 84802.$$

Diese Zahl gibt noch etwas Kleineres als der Umfang, aber sie ist in soweit richtig, daß ihre letzte Zifer, die vom 154ten Range ist, um eine Einheit vermehrt, schon etwas Größeres als der Umfang ausdrücken würde *). In den gewöhnlichen Anwendungen braucht

man sie sehr weit fortführen wollte, und es würde vollkommen überflüssig seyn es zu thun, da die höhere Analysis für solche Berechnungen unendlich einfachere Methoden darbietet.

*) Man hat die Frage, ob die Peripherie gegen den Diameter incommensurabel sey, häufig aufgeworfen, und es ist höchst wahrscheinlich, daß sie verneint werden muß. Die angegebene Zahl π ist ein unfehlbarer Probierstein für die Richtigkeit jeder Zahlenverbindung, durch welche das Verhältniß zwischen beyden dargestellt seyn soll. So z. B. ist das Verhältniß 7 : 22 = 1 : 3,142 . . . bis auf die dritte; das 113 : 355, 3,1415929 . . . bis an die siebente Stelle richtig; sie geben weiterhin beyde den Umfang zu groß.

man fast nie mehr als ihre sieben ersten Zifern, $\pi = 3,141592$, und, wenn man mit Logarithmen rechnet, nur den für diese, $\log \pi = 0,4971499$.

2. Unter der Voraussetzung der Zahl π lassen sich die Fragen beantworten, welche auf die Länge der Peripherie, oder bestimmter Theile von ihr Beziehung haben.

a. Um aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises, d, den Umfang, p, zu finden, multiplicirt man ihn mit der Zahl π:

$p = d \cdot 3,141592$; oder, wenn man Logarithmen brauchen will, $\log p, = \log d + 0,4971499$. Die Peripherien verschiedener Kreise verhalten sich bekanntlich wie ihre Durchmesser.

b. Umgekehrt kann also auch aus der gegebenen Länge des Umfangs, p, der Durchmesser gefunden werden:

$$d = \frac{p}{\pi} = p \cdot 0,3183098 \ldots \text{ oder}$$

$$\log d = \log p + 0,5028501 - 1.$$

c. Um in einem Kreise von gegebenem Durchmesser die Länge eines Bogens, b, der zu einem bestimmten Winkel am Mittelpuncte, C, gehört, zu finden, berechne man seine Peripherie, p, und nehme von ihr einen eben so großen Theil, als es der gegebene Winkel von 360° ist:

$$b = \frac{C^\circ}{360^\circ}\, p = \frac{C^\circ}{360^\circ} \cdot d\pi = \frac{C^\circ}{180^\circ} \cdot r\pi,$$

wenn der Radius $= r$.

Man kann sich diese Rechnung dadurch sehr erleichtern, daß man ein für allemal bestimmt, was für einen Theil des Durchmessers oder Radius der Bogen eines Grades, b 1°; der einer Minute, b 1′; der einer Secunde, b 1″, beträgt; welches geschieht, indem man in der Formel für b, anstatt C nach und nach 1°, 1′, 1″ setzt.

$$b\ 1^\circ = r \cdot 0{,}0174532925: \text{ und}$$
$$\log b\ 1^\circ = 0{,}2418774 - 2, + \log r.$$
$$b\ 1' = r \cdot 0{,}0002908882; \text{ und}$$
$$\log b\ 1' = 0{,}4637261 - 4, + \log r.$$
$$b\ 1'' = r \cdot 0{,}0000048481; \text{ und}$$
$$\log b\ 1'' = 0{,}6855749 - 6, + \log r.$$

Ist nun ein Winkel gegeben, so multiplicirt man die Zahl seiner Grade mit b 1°; die Zahl der Minuten, die er daneben enthalten mag, mit b 1′; die Zahl der Secunden, die vielleicht noch außerdem in ihm vorkommen, mit b 1″; die Summe dieser Producte gibt die Länge des correspondirenden Bogens. Wenn der Winkel bloß in Graden, C. 1°; oder bloß in Minuten, C. 1′; oder bloß in Secunden, C. 1″, ausgedrückt ist, so gibt log C + log b 1° im ersten; log C + log b′ im zweyten; log C + log b 1″ im dritten Falle, den Logarithmen der Zahl, womit der Radius multiplicirt werden muß, um die des zugehörigen Bogens auszudrücken.

d. Ist umgekehrt der Radius, oder die Länge eines Bogens, b, gegeben, so läßt sich berechnen, wie viel Grade, Minuten, Secunden u. s. w., er selbst oder sein zugehöriger Winkel C enthält. So findet sich in Graden:

$$C = 1^\circ : \frac{180}{\pi} . \frac{b}{r} = 1^\circ . \frac{b}{r} \, 17{,}2957795,$$

$$\log C = \log b - \log r + 1{,}7581226 \ldots$$

In Minuten:

$$C = 1' . \frac{180 . 60}{\pi} . \frac{b}{r} = 1' . \frac{b}{r} . 3437{,}7467707,$$

$$\log C = \log b - \log r + 3{,}5362739.$$

In Secunden:

$$C = 1'' \frac{180 . 60 . 60}{\pi} . \frac{b}{r} = 1'' \frac{b}{r} \, 206264{,}8062470,$$

$$\log C = \log b - \log r + 5{,}3144251.$$

Eine Folgerung aus dieser Formel ist, daß Winkel, zwischen deren Schenkel aus den Scheiteln mit verschiedenen Radien Bögen beschrieben sind, sich wie diese, durch ihre eignen Radien dividirten, Bögen verhalten.

IV. Lage zweyer Kreise gegen einander.

Wenn man sich auf zusammengesetztere Untersuchungen in Beziehung auf Kreise einlassen will, so kann die Lage, welche mehrere Kreise in einer Ebene neben einander anzunehmen vermögen, dazu Gelegenheit darbieten. Bey zwey Kreisen ist es leicht, alle möglichen Fälle in dieser Rücksicht zu durchlaufen; aber schon bey dreyen sind elementarische Kenntnisse zur Ausführung der Untersuchung nicht hinlänglich.

Wenn der Abstand, den die Mittelpuncte zweyer Kreise von einander haben sollen, gegeben ist, und der Radius eines jeden unter ihnen gleichfalls, so läßt sich augenblicklich die gegenseitige Lage ihrer Peripherien bestimmen. Es gibt mehrere Fälle in dieser Rücksicht.

Ist die Summe der Radien größer, ihre Differenz aber kleiner als der Abstand der Mittelpuncte, so werden die beyden Kreise einander schneiden, und zwey Puncte in ihren Peripherien gemeinschaftlich haben. Ist die Summe der Radien genau so groß, als der Abstand der Mittelpuncte, so daß die Endpuncte der einander entgegengestreckten Radien genau in einem Puncte zusammenfallen, so bekommen die Peripherien einen Punct gemein, aber auch nur diesen einen; sie haben in ihm eine gemeinschaftliche Tangente, und liegen auf entgegengesetzten Seiten von derselben, also die eine ganz außerhalb der anderen. Ist die Differenz der Radien größer als der Abstand der Mittelpuncte, so haben die Peripherien keinen Punct mit einander gemein, und die eine liegt ganz innerhalb der anderen. Ist die Differenz der Radien genau so groß als der Abstand der Mittelpuncte, so treffen beyde Peripherien in einem einzigen Puncte zusammen, haben da eine gemeinschaftliche Tangente, und also identische Richtung. Wäre die Summe der Radien kleiner als der Abstand der Mittelpuncte, so würden beyde Kreise keinen Punct des Umfangs gemein haben, und der eine ganz außerhalb des anderen liegen. Alle diese Beziehungen erhellen augenblicklich aus Betrachtung der Figur, und gründen sich auf den evidenten Satz, daß, wenn die Peripherien zweyer Kreise einen Punct mit einander gemein haben sollen, der nicht in der geraden Linie durch ihre Mittelpuncte liegt, ein Dreyeck gebildet werden kann, worin eben jene Linie die eine Seite, die beyden Radien die anderen abgeben müssen, und aus der nothwendigen Beziehung zwischen den drey Seiten dieses Dreyecks, daß je zwey von ihnen mehr als die dritte betragen

müssen, kann bewiesen werden, daß jede Annahme, die mit einem der vorhin ausgesprochenen Sätze in Widerspruch steht, eine Ungereimtheit nothwendig mit sich führt. Es würde sich nicht der Mühe verlohnen, dabey ausführlicher zu verweilen.

Fünftes Capitel.

Grundlehren von Vierecken, besonders Parallelogrammen; von regelmäßigen; von dem Kreise eingeschriebenen oder umschriebenen; von sich ähnlichen Vielecken.

Sobald die Elementargeometrie über das Dreyeck hinausgehn will, ist ihr offenbar ein nicht zu erschöpfender Stoff fernerer Untersuchungen eröffnet, selbst wenn sie nur darauf beschränkt werden sollen, den Zusammenhang unter den Grundbestandtheilen des Umfangs auch bey zusammengesetzteren Figuren vollständig zu bestimmen, oder die Bedingungen ihrer Aehnlichkeit festzustellen, in derselben Art, wie es für Dreyecke vorhin geleistet ist.

Da aus jedem Vieleck, sobald man in seiner Ebene einen Punct nimmt, der nicht in der Richtung von einer seiner Seiten liegt, und von ihm aus zu jedem seiner Winkelpuncte gerade Linien zieht, so viele Dreyecke entstehn, als es Seiten hat, so läßt sich die Betrachtung desselben unfehlbar auf die von Dreyecken

gründen *). Die nachstehenden Lehren sind Proben solcher Betrachtungen.

I. Von Vierecken im Allgemeinen.

1. Allemal, wo zwey gerade Linien zwischen denselben Grenzpuncten, wie zwey andere, zusammenschließen, ohne mit diesen einen Punct gemein zu haben, bilden alle vier den Umfang eines Vierecks **), und die gerade Linie zwischen den beyden auf solche Art zwiefach verbundenen Grenzpuncten heißt Diagonale des Vierecks. Sie gibt offenbar die Basis von zwey Dreyecken ab, deren Schenkel die Seiten des Vierecks sind. Umgekehrt müssen aus jedem Viereck zwey Dreyecke entstehn, wenn man in diesem gegenüberstehende Winkelpuncte verbindet, es gestattet also stets zwey Diagonalen.

*) Man macht sich freylich den Gebrauch dieses Satzes sehr leicht, wenn man lediglich solche Vielecke betrachtet, die durchaus hohle Winkel enthalten, bey denen alsdann sich die genannten Dreyecke in derselben Ordnung wie ihre Grundlinien, an einer gemeinschaftlichen Spitze, einstimmig neben einander legen. Da es aber auch überstumpfe Winkel in Vielecken von mehr als drey Seiten geben kann, und alsdann oft jene Dreyecke sich ganz anders configuriren können, so sind Sätze, die unter der erstgenannten Voraussetzung gefunden worden, noch nicht als allgemein gültig anzusehn. Der Satz, daß in jedem nEck die Summe der Winkel (n — 2) 2R beträgt, kann als Probe dienen.

**) Nicht allemal geben vier gerade Linien, die sich zu einem zusammenhängenden, in sich selbst zurücklaufenden Zuge verbinden, ein Viereck.

2. **Ein Viereck kann einen überstumpfen Winkel, aber nur einen dieser Art, erhalten auf zwiefache Art.** Einmal, wenn beyde Dreyecke auf derselben Seite der Diagonale stehn, wie (fig. 45.) ACB, ABD; jeder der anderen, entweder wie D, ein Dreyeckswinkel, oder, wie die bey A und B, Differenz von zwey solchen, ist alsdann hohl. Zweytens, wenn beyde Dreyecke auf verschiedenen Seiten der Diagonale liegen (fig. 46.), und alsdann ihre Winkel an dem einen Endpuncte derselben, wie ABC, ABD, zusammen mehr als zwey rechte bringen, wo alsdann die beyden am anderen Endpuncte, A, wie CAB, BAD, weniger ausmachen müssen, weil alle vier zusammen nicht vier rechte austragen, mithin CAD als hohlen Winkel ergeben, wie es die beyden übrigen, bey D und C, nothwendig auch sind.

3. Es läßt sich also in jedem Viereck eine Diagonale so ziehn, daß die entstehenden Dreyecke auf verschiedenen Seiten derselben liegen, und dann ergibt die Figur unmittelbar, daß alle Winkel dieser Dreyecke zusammen die des Vierecks ausmachen, deren Summe also stets vier rechten gleich ist.

4. Man könnte eine allgemeine Theorie des Zusammenhangs unter den Stücken eines Viereckumfangs auf ähnliche Weise wie die des Dreyecks, und gegründet auf diese, entwerfen, wobey jederzeit fünf als ursprünglich, die drey übrigen als abhängig nachzuweisen seyn würden. Unter den fünf, der Größe und gegenseitigen Lage nach gegebenen Stücken müssen jedesmal von selbst zwey Seiten, nebst dem durch sie gebildeten Winkel

seyn; man erhält, ihre Endpuncte verbindend, sogleich eine Diagonale des Vierecks, und hat, in den beyden übrigen gegebenen Stücken Data zur Bildung des zweyten Dreyecks, welches, auf dieser Diagonale errichtet, die Construction des Vierecks vollenden muß.

Indessen pflegt man diese Untersuchung nicht ausführlich zu entwickeln, sondern begnügt sich mit der Theorie einer besonderen Vierecksform, die in der Planimetrie von vorzüglicher Wichtigkeit ist, der des Parallelogramms, eines Vierecks, in welchem Seiten, die sich gegenüberstehn, paarweise unter sich parallel sind. Außer ihnen haben noch diejenigen, worin nur zwey unter sich parallele Seiten liegen, einen besonderen Namen, den der Trapezien erhalten. Alle übrigen werden Trapezoïden genannt.

II. Theorie des Parallelogramms.

1. Die Entstehung und Natur des Parallelogramms im Allgemeinen ist leicht erklärt. Man nehme zwey willkührliche, unter einander parallele Linien, wie AB, CD (fig. 47.). Man verbinde zwey in ihnen beliebig gewählte Puncte, A, C, durch eine dritte Linie, CA; man nehme alsdann in einer von ihnen noch einen Punct nach Belieben an, z. B. D, um durch ihn eine Parallele mit der vorher gezogenen Transversale, AC, zu legen. Daß diese Linie in die zweyte Parallele eintreffen werde, erhellet daraus, daß es durch den nemlichen Punct nicht zwey der Richtung nach verschiedene Parallelen mit einer dritten geben kann, also, wenn

DC mit AB parallel war, DB es nicht seyn darf. So begrenzt sich das zweyte Paar von Parallelen zwischen dem ersten, und es entsteht das Parallelogramm.

2. Was die vier in dieser Figur enthaltenen Winkel betrifft, so stehn sie noch in engerer Beziehung gegen einander, als die des Vierecks überhaupt. Jede Seite wird von zwey auf ihr stehenden Parallelen eingeschlossen, die beyden dadurch entstandenen inneren entgegengesetzten Winkel müssen zwey rechte betragen. So erscheinen benachbarte Winkel des Parallelogramms immer als Nebenwinkel; es ist eine leichte Folgerung daraus, daß gegenüberliegende sich einander gleich seyn müssen; und durch einen Winkel werden alle gegeben seyn.

Wenn also die Schenkel eines Winkels, FDE, denen eines anderen, an beliebigem Scheitelpuncte gelegenen, CAB, parallel, und ihnen einstimmig gerichtet sind, so müssen beyde Winkel identisch seyn.

Man kann unmittelbar an diesen Satz das brauchbare Theorem anschließen, daß Lothe auf zwey Richtungen stets denselben Winkel einschließen müssen, welchen diese selbst bilden. Sind die Lothe im Scheitelpuncte des Winkels errichtet, so ergibt sich der Satz von selbst; sind sie anderswo aufgestellt, so sind sie denen im Scheitelpuncte parallel, geben also denselben Winkel als diese.

3. Auch die vier Seiten sind, obgleich auf andere Art, in näherer gegenseitiger Abhängigkeit. Um sie zu vergleichen, ziehe man (fig. 47.) im Parallelogramm ABCD die Diagonale AD. Dadurch entstehn zwey

Dreyecke, ADC, ADB, wovon das eine zwey benachbarte Seiten des Parallelogramms, AC, DC; das andere die beyden übrigen, AB, BD, als Schenkel enthält, während beyde auf der Diagonale als Basis errichtet sind. Soll die Identität dieser Dreyecke dargethan werden, so kann es hier nur durch hinzukommende Gleichheiten ihrer Winkel geschehn. Aber diese sind auch augenblicklich nachzuweisen. Die Diagonale verbindet sowohl das erste Paar Parallelen, AB, CD; als auch das zweyte Paar, AC, BD. Die inneren Wechselwinkel, welche sie mit jedem Paare bildet, CAD und ADB bey dem ersten; CDA und DAB bey dem zweyten sind also unter einander gleich. Das eine unserer Dreyecke hat folglich an seiner Basis dieselben Winkel wie das andere, nur in umgewendeter Ordnung. Mithin sind die übrigen Seiten der Dreyecke, so wie sie gleichen Winkeln gegenüberstehn, das heißt also, die aus verschiedenen Endpuncten der gemeinschaftlichen Basis ausgehenden, AC und DB; AB und DC, unter einander gleich. Gegenüberstehende Seiten eines Parallelogramms haben folglich die nemliche Länge. Auch das Umgekehrte dieses Satzes: wenn in einem Vierecke gegenüberstehende Seiten paarweise gleich sind, so muß es ein Parallelogramm seyn, folgt aus derselben Betrachtung so leicht, daß es unnöthig wäre, dabey zu verweilen. Der Satz endlich, daß allemal, wenn gleichlange Parallelen aus einer Linie auf derselben Seite von dieser ausgehn, und deren Endpuncte durch eine vierte verbunden werden, ein Parallelogramm entstehe, ist schon früher (S. 222, 3.) abgeleitet.

zen zu einer genäherten Zahl zusammenziehn will, nöthig ist. Sehne und Tangente, beyde mit der Zahl multiplicirt, welche angibt, wie oft ihr Bogen in der Peripherie enthalten ist, geben die gesuchten Grenzen, von denen die eine Etwas kleineres, die andere Etwas größeres als die Peripherie darstellt; die in sofern, als sie unter einander zusammenstimmen, mit völliger Sicherheit auch die Länge der Peripherie bezeichnen werden, und von denen es streng bewiesen ist, daß im Fortgange des Verfahrens ihr Unterschied geringer als jede noch so kleine Zahl werden kann, vermöge deren man also der Peripherie so nahe zu kommen vermag, als man will.

E. Resultat der nähernden Bestimmung.

1. Man hat nach diesen Principien die Näherung weiter getrieben *), als in irgend einer Anwendung

*) Der Anfang dieser mühsamen Rechnung gibt folgende Resultate, wobey, herkömmlich, der Durchmesser = 1 gesetzt ist.

n	ns	nt
6	3	3,464101
12	3,105828	3,215390
24	3,132628	3,159660
48	3,139350	3,146086
96	3,141031	3,142714
192	3,141452	3,141873
384	3,141557	3,141663
768	3,141583	3,141610
1536	3,141590	3,141597
3072	3,141592	3,141598.

Man kann schon aus diesen wenigen Zahlen sehen, wie langsam die Näherung ist, die der Lauf der Rechnung gestattet. Es würde eine unerträgliche Weitläuftigkeit geben, wenn

gefordert werden könnte. Die Zahl, welche die Länge des Umfangs in Beziehung auf den Durchmesser angibt, d. h. diejenige, womit man den Durchmesser multipliciren muß, um den Umfang zu erhalten, wird beständig durch das Zeichen π angedeutet, und ist, nach der schärfsten, jetzt bekannten Bestimmung, folgende:

$$\pi = 3{,}141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279502884\ 19716939937510582097494459230781640628\ 6208\ 998628034825342117067982148086513\ 28230664709384460955058223172535940812\ 84802.$$

Diese Zahl gibt noch etwas Kleineres als der Umfang, aber sie ist in soweit richtig, daß ihre letzte Zifer, die vom 154ten Range ist, um eine Einheit vermehrt, schon etwas Grösseres als der Umfang ausdrücken würde *). In den gewöhnlichen Anwendungen braucht

man sie sehr weit fortführen wollte, und es würde vollkommen überflüssig seyn es zu thun, da die höhere Analysis für solche Berechnungen unendlich einfachere Methoden darbietet.

*) Man hat die Frage, ob die Peripherie gegen den Diameter incommensurabel sey, häufig aufgeworfen, und es ist höchst wahrscheinlich, daß sie verneint werden muß. Die angegebene Zahl π ist ein unfehlbarer Probierstein für die Richtigkeit jeder Zahlenverbindung, durch welche das Verhältniß zwischen beyden dargestellt seyn soll. So z. B. ist das Verhältniß $7 : 22 = 1 : 3{,}142\ldots$ bis auf die dritte; das $113 : 355$, $3{,}1415929\ldots$ bis an die siebente Stelle richtig; sie geben weiterhin beyde den Umfang zu groß.

man fast nie mehr als ihre sieben ersten Ziffern, $\pi = 3,141592$, und, wenn man mit Logarithmen rechnet, nur den für diese, $\log \pi = 0,4971499$.

2. Unter der Voraussetzung der Zahl π lassen sich die Fragen beantworten, welche auf die Länge der Peripherie, oder bestimmter Theile von ihr Beziehung haben.

a. Um aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises, d, den Umfang, p, zu finden, multiplicirt man ihn mit der Zahl π:

$p = d \cdot 3,141592$; oder, wenn man Logarithmen brauchen will, $\log p, = \log d + 0,4971499$. Die Peripherien verschiedener Kreise verhalten sich bekanntlich wie ihre Durchmesser.

b. Umgekehrt kann also auch aus der gegebenen Länge des Umfangs, p, der Durchmesser gefunden werden:

$$d = \frac{p}{\pi} = p \cdot 0,3183098 \ldots \text{ oder}$$

$$\log d = \log p + 0,5028501 - 1.$$

c. Um in einem Kreise von gegebenem Durchmesser die Länge eines Bogens, b, der zu einem bestimmten Winkel am Mittelpuncte, C, gehört, zu finden, berechne man seine Peripherie, p, und nehme von ihr einen eben so großen Theil, als es der gegebene Winkel von 360° ist:

$$b = \frac{C^\circ}{360^\circ}\, p = \frac{C^\circ}{360^\circ} \cdot d\pi = \frac{C^\circ}{180^\circ} \cdot r\pi,$$

wenn der Radius $= r$.

Soll eine solche n Seiten haben, so theile man an einem beliebigen Scheitelpuncte, die ganze Umdrehung in n gleiche Theile. Macht man die Schenkel aller dadurch entstandenen Winkel gleichlang, und verbindet man die Endpuncte benachbarter durch neue gerade Linien, so stiftet man eben so viele congruente gleichschenklichte Dreyecke, deren Grundlinien, gleichgroß und unter gleichen Winkeln gegen die Schenkel, also auch gegen einander geneigt, den Umfang eines regulären Polygons darstellen müssen.

Man hat es frey, welche Länge den identischen Schenkeln dieser Dreyecke gegeben werden soll. Sie so lang zu nehmen, daß die Basis des einzelnen eine vorgeschriebene Größe erhält, ist allemal möglich. Ist der Winkel an der Spitze $\frac{4R}{n}$, so muß jeder an der Basis $R - \frac{2R}{n}$ seyn. Ist aber für ein gleichschenklichtes Dreyeck die Basis und der Winkel an ihr gegeben, so findet sich daraus der Schenkel. Es folgt aus dieser Entstehung des regelmäßigen Vielecks, daß, wenn die Zahl seiner Seiten n ist, jeder Winkel in ihm $\frac{(n-2)}{n} . 2R$ betragen muß, die Summe aller also $(n-2) . 2R$.

2. Wenn ein regelmäßiges Vieleck auf diese Art gebildet worden, so geht durch jeden Winkelpunct desselben die Peripherie eines Kreises, der den Scheitelpunct der in n gleiche Theile zerlegten ganzen Umdrehung zum Mittelpuncte hat, und es heißt dann ein diesem Kreise *eingeschriebenes*. Umgekehrt, wenn die Pe-

ripherie eines Kreises in n gleiche Bögen zerlegt, und für jeden die Sehne gezogen wird, so sind auch die Winkel von je zwey benachbarten Sehnen, als Peripheriewinkel, die über gleichen Bögen stehn, gleicher Größe, wie die Sehnen selbst; diese bilden also ein reguläres Vieleck. Man kann die Construction eines solchen durch Hülfe der Kreisperipherie in der Ausführung erleichtern, aber die Aufgabe, eine Kreisperipherie oder einen Bogen in jede beliebige Zahl von gleichen Theilen zu zerlegen, worauf eine allgemeinere Constructionsregel beruhen würde, entbehrt einer wissenschaftlichen Lösung.

3. In jedem regelmäßigen Vieleck gibt es umgekehrt einen Mittelpunct für seine Ecken, welcher erhalten werden kann, wenn man, über einer von seinen Seiten, die Polygonwinkel an ihren Enden halbirt, und die Linien, wodurch es geschieht, zum Zusammenstoßen bringt. Er wird Centrum des Kreises, dem sich das Vieleck einschreiben läßt, weil er gemeinschaftliche Spitze aller der gleichschenklichten Dreyecke ist, die sich, mit gleichen Winkeln an der Basis, über den einzelnen Vielecksseiten aufrichten lassen.

4. Da die Lothe aus den Spitzen identischer gleichschenklichter Dreyecke auf die Grundlinien congruiren, und die Linie, auf welcher der Radius eines Kreises in seinem Endpuncte lothrecht steht, eine Tangente des Kreises ist, so wird, ein Loth aus dem Mittelpuncte des Polygons auf eine Seite desselben, wie (fig. 49.) CE auf AB, Radius eines Kreises, der von jeder Seite des Polygons berührt werden muß. Dieses pflegt als-

dann dem Kreise umschrieben zu heißen. Man kann also Centrum und Radius eines solchen Kreises auch erhalten, wenn man jede von zwey benachbarten Polygonseiten wie AB und BD, halbirt, aus ihren Mitten Lothe, wie EC und FC, errichtet, und den Punct ihres Zusammenstoßens, C, darstellt; er ist zugleich Centrum des Kreises, dem das Vieleck als eingeschrieben dargestellt werden kann.

Die in der Lehre vom Kreise zur Betrachtung gezogenen Sehnen und Tangenten von Bögen, welche aliquote Theile der ganzen Peripherie sind, stellen offenbar Seiten regelmäßiger Vielecke dar, die dem Kreise eingeschrieben, oder demselben umschrieben sind; die Theorie dieser Sehnen und Tangenten gibt also zugleich Data für die der genannten regelmäßigen Vielecke.

IV. Vielecke, die dem Kreise eingeschrieben, oder von ihm umschrieben sind.

Es sind nicht bloß die regelmäßigen Vielecke, welche sich einem Kreise einschreiben oder umschreiben lassen, es gibt Fälle, wo auch andere dieses gestatten, und eine solche Verbindung mit dem Kreise bietet besondere Beziehungen dar.

1. Daß für jedes Dreyeck ein Kreis gefunden werden kann, in dem es als eingeschrieben erscheinen muß, ist nur ein veränderter Ausdruck des Satzes, daß Centrum und Radius eines Kreises vollkommen bestimmt sind, sobald drey Puncte gegeben werden, durch welche seine Peripherie gehen soll. Es folgt daraus unmittelbar, daß drey Lothe, aus den Mitten der drey

Seiten des Dreyecks aufsteigend, sich in einem Puncte, dem Mittelpuncte des Kreises, welchem das Dreyeck eingeschrieben ist, begegnen.

2. Für jedes Dreyeck einen Kreis, dem es umschrieben ist, zu erhalten, hat eben so wenig Schwierigkeit. Wenn man zwey Winkel eines Dreyecks, wie (fig. 50.) die bey A und B, halbirt, und aus dem Puncte D, wo die Linien AD, BD, wodurch es geschieht, zusammenstoßen, Lothe auf die Seiten des Dreyecks herabläßt, so werden diese gleichlang, da allemal die beyden rechtwinklichten Dreyecke, die eine der Halbirungslinien gemein haben, wie ADE und ADF, oder BDE und BDG, zugleich in den Winkeln übereinstimmend, congruent sind, woraus DF = DE = DG nothwendig folgt. Dabey verdient bemerkt zu werden, daß die aus dem Puncte D, wo zwey, Winkel halbirende, Linien zusammentreffen, zum Scheitelpuncte des dritten gezogene, DC, diesen dritten auch halbirt, welches, da die durch sie entstandenen rechtwinklichten Dreyecke, CDF und CDG, nicht allein sie selbst gemein haben, sondern noch außerdem in ihnen eine zweyte Seite, DF = DG, aus der Congruenz dieser Dreyecke hervorgeht. Die drey Linien, wodurch sich die drey Winkel eines Dreyecks halbiren, stoßen also stets in einem Puncte zusammen; die drey Lothe aus ihm auf die Seiten des Dreyecks werden gleichlang, und geben den Radius eines Kreises, dem das Dreyeck umschrieben seyn muß. Die Möglichkeit, den Satz in Beziehung auf einen solchen Kreis umzukehren, und zu behaupten, daß Linien aus dem Centrum desselben zu den Scheitelpuncten der Dreyeckswinkel gezogen, diese halbiren müssen, springt

in die Augen, und mit ihr die Richtigkeit des Satzes, daß jedes Dreyeck nur einen Kreis umschreiben kann.

4. Nicht jedes Viereck läßt sich in einen Kreis einschreiben. Denn denkt man dieses als geschehen, so erscheint jedes Paar gegenüberstehender Winkel in ihm als Zusammenstellung von zwey Peripheriewinkeln, stehend auf Bögen, die zusammen die ganze Peripherie ausmachen. Beyde Winkel müssen folglich zusammen zwey rechte betragen. Haben umgekehrt die Winkel eines Vierecks diese Beziehung, so läßt sich der verlangte Kreis finden; es muß derjenige seyn, dem eins der Dreyecke angeschrieben ist, welche die Diagonale im Viereck stiftet.

5. Nicht für alle Vierecke läßt sich ein umschreibender Kreis finden, sondern nur für solche, worin drey Linien, deren jede einen Winkel des Vierecks halbirt, in einem Puncte zusammenstoßen, wo denn auch die, den vierten Winkel halbirende, in demselben Puncte, Centrum des gewünschten Kreises, eintreffen muß. Die Ableitung des Satzes bleibt ganz wie die (in №. 3.) des ähnlich lautenden für das Dreyeck.

V. Aehnlichkeit beliebiger Vielecke.

Die Möglichkeit, daß es Figuren geben kann, welche sich ähnlich sind, d. h. deren Umfänge sich durch nichts als die absolute Größe der Seiten von einander unterscheiden, so daß der eine die nemlichen Winkel in derselben Folge als der andere enthält, und ähnlich liegende Seiten aus beyden sich proportionirt sind, ist

durch eine frühere Betrachtung nur für Dreyecke dargethan. Es entsteht also die Frage: ob sie auch auf zusammengesetztere Vielecke erstreckt werden kann.

1. Daß sich durch Zusammensetzung zweyer Reihen von Dreyecken, die zweyte aus solchen gebildet, die nach der Ordnung denen der ersten ähnlich sind, ähnliche Figuren erzeugen lassen, erhellet sogleich. Man nehme mehrere Winkel, die zusammen vier rechte ausmachen, wenn sie an einem Scheitelpuncte in bestimmter Folge vereinigt werden, es sey daß sie dabey durchgehends einstimmig, oder auch abwechselnd widerstreitend sind, lege jeden von ihnen an die Spitze eines besonderen Dreyecks, und lasse jedes nachfolgende unter diesen Dreyecken in einer von den beyden Seiten, welche den Winkel an der Spitze einschließen, mit dem vorhergehenden, in der anderen mit dem folgenden Dreyecke übereinstimmen, das erste und letzte gleichfalls als auf einander folgende gedacht. Alle diese Dreyecke, mit ihren Spitzen an einem Puncte zusammengelegt, werden ein Polygon bilden, dessen Seiten die Grundlinien der Dreyecke, dessen Winkel Summen oder Differenzen zweyer, an den Grundlinien von zwey benachbarten Dreyecken liegender Winkel sind.

Hat man nun, eben die Winkel an der Spitze enthaltend, eine Reihe anderer Dreyecke, die denen der ersten Reihe, unter einem sich immer gleich bleibenden Verhältnisse ähnlich liegender Seiten in beyden Reihen, ähnlich sind, so werden sie sich wie die vorigen zu einer Figur zusammen legen lassen, und diese Figur wird nicht nur durchaus die nemlichen Winkel in sich schließen, wie die vorige, da beyde überhaupt in Absicht auf ihre Winkel und deren Zusammenfügung identisch

angenommen worden, sondern auch Seiten, die denen der ersten proportionirt sind, da die Seiten der ersten, Grundlinien beliebiger Dreyecke, die der zweyten, Grundlinien ähnlicher und ähnlich liegender Dreyecke sind, enthalten. Es ist also die Möglichkeit ähnlicher Vielecke überhaupt dargethan.

2. Die Aufgabe, zu einem gegebenen Polygon ein ähnliches, unter beliebiger Größe des zwischen den ähnlich liegenden Seiten von beyden stattfindenden Verhältnisses, zu verzeichnen, löst sich unmittelbar durch Hülfe der vorigen Betrachtung auf. Denn man kann dadurch, daß man im Innern des gegebenen Polygons irgendwo einen Punct annimmt, und aus ihm nach allen Ecken gerade Linien zieht, jede derselben vom Anfangspuncte aus in dem Verhältnisse verkürzt oder verlängert, in welchem die Seiten der gesuchten Figur kleiner oder größer seyn sollen als die ähnlich liegenden der gegebenen, und die Endpuncte dieser neuen Linien in eben der Ordnung paarweise verbindet, in der die jener anfänglichen durch die Seiten der Figur selbst verbunden sind, zwey Figuren, beyde aus gleichvielen sich paarweise in steter Folge ähnlichen Dreyecken gebildet erhalten.

Soll für ABCDE (fig. 51.) eine ähnliche, mit einem durch $\frac{m}{n}$ ausgedrückten Seitenverhältnisse, gezeichnet werden, so nehme man beliebig den Punct P, ziehe aus ihm in jeder Ecke der Figur, PA, PB, . . . PE, schneide von jeder aus P ab $\frac{m}{n}$, und erhalte so Pa, Pb, . . . Pe; verbinde die Endpuncte a, b, . . . e, wie es mit dem correspondirenden A, B, . . . E ge-

schehen ist. Alsdann ist abcde dem ABCDE ähnlich unter dem Seitenverhältniß $\frac{m}{n}$. Denn zu jedem Dreyecke der anfänglichen Figur, wie ABP, entsteht ein ihm ähnliches abP, da der Winkel P beyden gemein ist und $\frac{Pa}{PA} = \frac{Pb}{PB} = \frac{m}{n}$ gemacht ist. Daraus folgt, daß auch $\frac{ab}{AB} = \frac{m}{n}$ seyn wird, so wie daß die Winkel bey a und b denen bey A und B identisch sind, woraus sogleich, daß der Polygonwinkel bey A, dem bey B gleich ist, gefolgert werden kann.

3. Umgekehrt endlich darf man auch behaupten, daß zwey Figuren, wenn sie einander ähnlich sind, in zwey Reihen von Dreyecken aufgelöst werden können, so daß jedes Dreyeck der zweyten Reihe einem der ersten durchaus ähnlich ist, und in allen gleiche Verhältnisse ähnlich liegender Seiten herrschen. Denn es sey (fig. 51. das eine Polygon, ABCDE, dem anderen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ähnlich. Sey, auf irgend eine Art, das erste von einem Puncte P aus, in Dreyecke zerlegt worden. Nimmt man nun Pa = $\frac{m}{n}$ PA, Pb = $\frac{m}{n}$ PB, . . . Pe = $\frac{m}{n}$ PE, so wird abcde ähnlich der gegebenen Figur ABCDE, unter dem Seitenverhältniß $\frac{m}{n}$. Mithin ab = $\alpha\beta$, bc = $\beta\gamma$, . . . ae = $\alpha\varepsilon$. Also abcde und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ congruent, da sie identische Seiten und Winkel in gleicher Folge besitzen. Man braucht also nur auf

ner Seite des zweyten Polygons, $\alpha\beta$, ein Dreyeck zu richten, $\alpha\beta\pi$, demjenigen ähnlich, welches im ersten)er dessen correspondirender Seite, AB, schon steht, BP, um einen Punct π in ihm zu finden, aus wel- em die geforderte Zerlegung in ähnliche Dreyecke voll- hrt werden kann.

Man überzeugt sich leicht, daß nicht bloß für Viel- 'e mit lauter hohlen Winkeln, sondern auch für solche,)rin überstumpfe Winkel vorkommen, diese Sätze ltig sind.

Man könnte freylich für zusammengesetztere Figu- n als das Dreyeck, den Zusammenhang unter den edingungen ihrer Aehnlichkeit, die an Menge mit den eiten und Winkeln der Figur selbst zunehmen, einer sonderen Betrachtung unterwerfen. Aber diese Unter- chung würde vor allen Dingen eine vollendete Kennt- ß der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer Grundbestand- eile voraussetzen, kann also in den Elementen, für elche schon jene von viel zu großem Umfange ist, nicht sgeführt werden. Nur der negative Satz mag hier, n einen leicht möglichen Irrthum zu verhüten, ange- hrt werden, daß bloß bey Dreyecken, aber nicht bey zend einer anderen Figur, völlige Uebereinstimmung r Winkel zur Folge eine durchgängige Aehnlichkeit if. Das Quadrat und das Oblongum enthalten je- s nichts als einzelne rechte, mithin durchaus identi-)e Winkel. Aber die Seiten des einen stehen im erhältnisse der Gleichheit, die des anderen im Ver- ltnisse der Ungleichheit zu einander, es kann also von iner Aehnlichkeit beyder Figuren die Rede seyn.

Sechstes Capitel.

Von den Flächen der Figuren, ihrer Vergleichung und Berechnung.

I. Idee und Zweck der Planimetrie.

Durch jede zusammenhängende Linienverbindung, die, ohne sich zu kreuzen, in sich selbst zurückläuft, und ganz in eine ebene Fläche fällt, wird ein begrenztes Stück dieser unbestimmten ebenen Fläche dargestellt; es entsteht allemal ein Flächenraum von bestimmter Größe, wo sich der Umfang einer ebenen Figur gebildet hat.

Die Planimetrie hat zum Zweck, die Auffassung solcher Flächenräume in ursprünglicher Anschauung auf bestimmte Regeln zurückzubringen, und dadurch eine Vergleichung der Arealgrößen beliebig begrenzter ebener Flächen zu vermitteln. Ihr Hauptbestreben muß bey solchen Vergleichungen darauf gerichtet seyn, daß dieselben nicht unmittelbar, vermöge des Messens der einen Fläche durch die andere, so wie es bey einer geraden Linie durch Anlegen des Maaßstabes geschieht, vollzogen zu werden brauchen, sondern daß dieses mittelbar durch Verknüpfung und Vergleichung von Datis geleistet wird, die bloß longimetrisch sind; und als solche entweder unmittelbar in den Umfängen der gegebenen Figuren liegen, oder aus diesen durch unfehlbare Constructionen abgeleitet werden können. So wie die Umfänge ebener Figuren die Flächen derselben bestimmen, sollen sie auch zu Vermittlern der Vergleichung unter denselben dienen, und dadurch, so viel es irgend

möglich ist, Planimetrie auf Longimetrie zurückgebracht werden.

Die Fläche einer Figur ist Etwas mittelbarer Weise, durch ihren Umfang gegebenes, hört aber deswegen nicht auf, ein Gegenstand ursprünglicher Anschauung zu seyn. Die Seiten der Figur, unter bestimmten Winkel zusammengefügt, müssen gegeben seyn, und aufgefaßt werden, wenn man von ihrer Fläche eine Vorstellung gewinnen will. Aber man kann im ganzen Umfange der Figur herumgehn, jede Seite, jeden Winkel in der Anschauung ergreifend, ohne von der Größe ihrer Fläche die geringste Vorstellung zu gewinnen. Dazu wird eine eigenthümliche Raumbeschreibung erfordert, deren Gang zwar durch den Umfang der Figur bestimmt und geleitet, aber in diesem selbst und seiner Erzeugung durchaus nicht enthalten ist. Eine Linie, aus gegebener anfänglicher Lage in continuirlicher Bewegung fortrückend, und dabey selbst vielleicht ihre eigene Länge ändernd, damit sie mit ihren, sich dem gemäß ändernden, Endpuncten den ganzen Umfang der Figur durchlaufe, so, daß kein Punct im Innern der Figur ist, über welchen sie nicht auf diese Weise fortgeführt worden wäre, kann allein, indem sie unausgesetzt verfolgt wird, zur Uebersicht des Flächenraums bringen, den die gegebene Figur in sich faßt.

Die einfachste Bewegung einer geraden Linie in ebener Fläche, ist ohne Zweifel diejenige, bey welcher alle ihre Puncte selbst gleichlange und gleichgerichtete gerade Linien beschreiben. Eine solche findet statt, sobald eine gerade Linie parallel mit sich selbst fortgeführt wird, und ist auf unzählig viele Arten möglich, da man unzählig viele Richtungen durch ihren Anfangs-

punct legen und diesen, mit ihr zugleich, so fortführen kann, daß, während er in irgend einer solchen Richtung fortgeht, sie selbst gegen dieselbe ihre Neigung nach der nemlichen Seite hin nicht verändert. Bekanntlich entsteht auf diese Art das Parallelogramm, welches also in Absicht auf die ursprüngliche Beschreibung seiner Fläche, die einfachste aller Figuren genannt werden darf. Die Aufgabe, zwey Parallelogramme in Absicht auf ihren Flächenraum zu vergleichen, und das Verhältniß derselben mittelbar durch Hülfe ihrer Seitenlinien zu bestimmen, ist also die Fundamentalaufgabe der Planimetrie. Da jedes Dreyeck als congruente Hälfte eines Parallelogramms angesehn werden kann, und der Flächenraum jedes Vielecks in Dreyecke zerlegbar ist, so wird sich weiterhin die Vergleichung der Arealgrößen aller übrigen geradlinichten Figuren auf die von Parallelogrammen, deren Seitenlinien durch bestimmte Constructionen aus den Umfängen jener Figuren abgeleitet werden können, zurückbringen lassen.

II. Vergleichung, Verwandlung und Vereinigung von Parallelogrammen.

A. Grundlehren über die Vergleichung der Parallelogramme.

Wenn eine gerade Linie, (fig. 52.) AC, mit ihrem Anfangspuncte in einer beliebig durch denselben geführten Richtung AB, parallel mit sich selbst bleibend fortrückt, so hat sie die Fläche eines Parallelogramms beschrieben, sobald sie aus ihrer ersten Lage in eine zweyte gekommen ist. Umgekehrt kann jedes Parallelogramm, auf doppelte Weise durch ein parallel mit sich selbst gesche-

hendes Fortrücken der einen von seinen Seitenlinien, über der anderen entstanden seyn.

1. Je größer die Linie, in deren Richtung die flächenbeschreibende, parallel mit sich selbst, fortgeführt wird, und über welcher als Seite sich eben dadurch ein Parallelogramm erzeugt, um desto größer muß die Fläche ausfallen, denn über gleichgroße Stücke von ihr, wie EA = EB (fig. 52.), kommen offenbar identische Parallelogramme, wie AEFC und EBDF, die mithin auch gleiche Flächenräume enthalten, zu stehn. Wenn ein Parallelogramm dieselben Winkel wie ein anderes; eine Seitenlinie übereinstimmend mit jenem, besitzt; und sich bloß in Absicht auf die Größe der anderen von ihm unterscheidet, so stehn die Flächen von beyden genau in demselben Verhältniß, wie die verschiedenen Seitenlinien, die sie enthalten. Sind (fig. 53.) in den beyden Parallelogrammen, AB und DF, die Winkel so wie die aufstehenden Seitenlinien, AC, DE, gleich; ihre Grundlinien aber verschieden, so ist das Verhältniß ihrer Flächen mit dem ihrer Grundlinien, AG und DH, identisch.

2. Auf eben dem Wege wird es möglich, die Flächen zweyer beliebigen Parallelogramme, die gleichgeneigte, aber durchaus verschiedene Seitenlinien besitzen, mittelbar durch Hülfe dieser Seitenlinien vergleichen zu können. Sey das erste, AB, und in ihm AG = a, AC = b; das andere, $\mathfrak{AB}$, und in diesem $\mathfrak{AG} = \alpha$, $\mathfrak{AC} = \beta$.

Man construire ein drittes Parallelogramm, DF, mit den nemlichen Winkeln, gebe aber demselben eine

Seitenlinie DE = AC = b aus dem ersten; die andere DH = 𝔄𝔊 = α aus dem zweyten. Alsdann ist, vermöge des vorigen Satzes $\frac{AB}{DF} = \frac{AG}{DH} = \frac{a}{\alpha}$, und $\frac{DF}{\mathfrak{AB}} = \frac{DE}{\mathfrak{AC}} = \frac{b}{\beta}$. Beyde Sätze, durch Multiplication verbunden, geben $\frac{AB}{DF} . \frac{DF}{\mathfrak{AB}} = \frac{AB}{\mathfrak{AB}} = \frac{a}{\alpha} . \frac{b}{\beta}$.

Das Verhältniß der Flächen zweyer Parallelogramme, die sich in den Winkeln gleichen, setzt sich also aus den beyden zusammen, die, das eine zwischen ihren ersten, das andere zwischen ihren zweyten Seitenlinien, stattfinden, oder ist, arithmetisch ausgedrückt, das Product der Zahlen, wodurch sich jene Verhältnisse unter den Seitenlinien darstellen.

Will man unter dem Worte Seitenlinien unbenannte Zahlen verstehn, entsprungen aus denen, welche bey der Messung der Seitenlinien durch den nemlichen Maaßstab (wenigstens ähnlich liegender durch den nemlichen, wenn auch für das erste Paar ein anderer, als für das zweyte gebraucht seyn sollte) hervorgehn, indem man deren benannte Einheit wegläßt, so darf man den Satz auch auf die gewöhnliche Weise aussprechen: die Flächen von zwey Parallelogrammen, die gleiche Winkel besitzen, verhalten sich wie die Producte aus ihren respectiven Seitenlinien. Für Rechtecke, wo die eine Seitenlinie, wie bey jedem Parallelogramm, Basis, die andere Höhe genannt wird, lautet der Satz: die Flächen zweyer Rechtecke verhalten sich wie die Producte aus ihrer Basis in ihre Höhe; für Quadrate: ihre Flächen verhalten sich, wie die zweyten Potenzen ihrer Seitenlinien.

3. Wenn zwey Parallelogramme nicht in Hinsicht auf die Winkel zusammenstimmen, so bedarf es einer ferneren Untersuchung, um ihre Flächen vergleichen zu können. Ließen sich Linien aus einer endlichen Zahl von Puncten, Flächen dem gemäß aus einer endlichen Zahl von Linien zusammensetzen, so würde allerdings jedes schiefe Parallelogramm bloß von der Länge, nicht aber von der gegenseitigen Neigung der Seitenlinien abhängig seyn.

Bey genauerer Betrachtung ergibt sich aber im Gegentheil, daß Vergrößerung der Schiefe in den Winkeln, welche die Seiten des Parallelogramms mit einander einschließen, wenn die Länge der Seiten selbst ungeändert bleibt, mit Verkleinerung des Flächeninhalts unzertrennlich verbunden ist, oder daß, wenn der Inhalt und die Grundlinie ungeändert bleiben sollen, Seitenlinien, welche unter schiefern Winkeln von der Grundlinie aufsteigen, an Länge zunehmen müssen. Es stehe (fig. 54.) über einer beliebigen Basis ein Parallelogramm, ABDC. Man drehe zuerst diejenige Seitenlinie der Figur, welche bey der vorzunehmenden Aenderung der Lage einen größeren Winkel mit der Grundlinie machen wird, als vorher, BD, lasse sie aber eben so hoch hinauf als vorher, mithin bis in die Verlängerung der Parallele reichen, welche der Basis gegenüberliegt, wie CF. Dadurch hat sich zu dem anfänglichen Parallelogramm ein Dreyeck, DBF, gefügt, mit ihm zusammen die Fläche eines Trapeziums bildend, ABFC. Nun lasse man ferner, um den nemlichen Winkel die Seitenlinie des Parallelogramms, welches der zuerst gedrehten parallel ist, AC, verrückt,

und dabey eben so hoch hinauf wie jene geführt werden, AE. Dadurch hat man ein Dreyeck, AEC, aus der vorhin betrachteten Figur herausgehoben, wie man vorher ein anderes, DBF, angefügt hatte. Die völlige Identität dieser beyden Dreyecke zeigt sich auf den ersten Blick, da die aus den Endpuncten der Basis zuerst gezogenen Linien, AC und BD, so wie die durch gleichgroße Drehung aus ihnen abgeleiteten, als Parallelen zwischen Parallelen gleichlang sind. Es versteht sich also von selbst, daß diese Dreyecke auch gleiche Flächen besitzen. Nun aber verwandelt sich, durch das Anfügen des ersten Dreyecks, DBF, und das nachherige Abnehmen des zweyten, CAE, die Fläche des anfänglichen Parallelogramms, ABDC, in die eines neuen mit veränderter Lage der Seitenlinien, in welchem dieselben aber eben so hoch hinaufreichen, ABFE. Beyde Figuren haben also gleichgroßen Flächeninhalt.

Vermöge der letzten Betrachtung kann jedes Parallelogramm in ein anderes, welches mit ihm eine Seite als Basis gemein hat, und für welches die Winkel nach Belieben vorgeschrieben sind, ohne Aenderung der Fläche, umgewandelt werden. Man ziehe mit der Basis eine Parallele, sobald die Seitenlinien bis zu ihr hinaufgehn, mögen sie übrigens eine Richtung nehmen, welche sie wollen, bleibt der Inhalt des Parallelogramms durchaus ungeändert. Es bedingt sich also die Größe der Fläche eigentlich durch die Basis, und deren Abstand von der ihr gegenüberstehenden Seite, der sich am einfachsten durch ein von dieser auf die Basis herabgefälltes Loth, die Höhe des Parallelogramms, darstellt. Dieses Loth wird durch die Länge der Seitenlinien, und ihre Nei-

gung gegen die Basis zwar bestimmt, kann aber ungeändert bleiben, während jene beyden Dinge, nur zugleich, und auf die gehörige Weise, sich mannichfaltig verändern. Je schiefer die Seitenlinien stehn, desto länger müssen sie werden, um bis in die der Basis gegenüberstehende Parallele hinaufzureichen.

Unter allen Parallelogrammen, die über einer gegebenen Basis stehend, einen vorgeschriebenen Flächeninhalt besitzen sollen, wird dasjenige, dessen Seitenlinien senkrecht aus den Endpuncten der Basis, in die ihr gegenüberliegende obere Parallele aufsteigen, das Rechteck mithin, den kleinsten Umfang besitzen.

Es bedarf wohl kaum eines Beweises, daß der eben ausgesprochene Hauptsatz auch umgekehrt gültig ist, oder daß Parallelogramme von gleicher Basis und Fläche auch gleiche Höhe besitzen müssen, da Aenderungen in der Höhe einer solchen Figur, wenn das Uebrige bleibt, nothwendig Aenderungen der Fläche nach sich ziehn.

4. Der allgemeinste Satz über die Vergleichung der Flächen von zwey beliebigen Parallelogrammen entspringt aus der Verbindung der beyden voranstehenden. Man verwandle zuvörderst das eine Parallelogramm, oder beyde, auf die Art, daß sie sich in den Winkeln gleich werden; die Flächen verhalten sich wie die Producte aus den Seitenlinien dieser neuen Parallelogramme. Das kürzeste Verfahren erhält man, wenn die neuen Parallelogramme Rechtecke sind. Ein Loth aus der Parallele, die der Basis eines Parallelogramms gegenübersteht, auf diese, gibt die Höhe des Rechtecks, welches gleiche Basis und Fläche mit ihm hat. Zwey

Parallelogramme verhalten sich also wie die Producte aus ihren beliebig gewählten Grundlinien in die denselben zugehörigen Höhen. Man würde aus diesem Satze rückwärts schließen dürfen, daß, wenn in einem Parallelogramm AD (fig. 54.) AG und AH Lothe auf die gegenüberstehenden Seiten sind, jederzeit AC . AH = AB . AG, oder die Seitenlinien sich umgekehrt wie die ihnen als Grundlinien zugehörigen Höhen verhalten müssen, und dieser Satz könnte als erste Probe longimetrischer Beziehungen dienen, die aus planimetrischen Lehren rückwärts abgeleitet werden können *). Er ergibt sich aus der Aehnlichkeit der rechtwinklichten Dreyecke, ACG und ABH, unmittelbar.

B. Verwandlungen von Parallelogrammen.

Aus dem Satze, daß die Flächen von Parallelogrammen, die sich in den Winkeln gleichen, sich wie die Producte ihrer Seitenlinien verhalten, ergeben sich mancherley Flächenverwandlungen, wenn man ihn mit longimetrischen Sätzen verbindet, in denen das Product zweyer Zahlen dem zweyer anderen gleichgesetzt wird, sofern diese Zahlen Ausdrücke von Linien, also ursprünglich benannte, gewesen sind, in denen man aber, indem sie sich anfangs zu Quotienten zusammengestellt haben, die gemeinschaftliche Benennung weggelassen hat. Als-

*) Wiefern überhaupt die Planimetrie Quelle longimetrischer Lehren seyn darf, verdient eine besondere Untersuchung. An sich muß Longimetrie unabhängig für sich bestehn, und Lehren die ihr angehören, aus ihren eigenen Principien abzuleiten vermögen.

dann werden jedesmal Parallelogramme von beliebigen gleichen Winkeln, deren Seitenlinien durch die Factoren jener Producte, nachdem ihnen eine beliebige Linieneinheit untergelegt worden, ausgedrückt sind, gleichen Flächeninhalt besitzen.

Die nachstehenden Sätze geben Proben solcher Vergleichungen.

1. Um ein Parallelogramm CB (fig. 55.) in ein anderes, ihm in den Winkeln gleiches, für welches eine Seitenlinie gegeben ist, zu verwandeln, ändere man seine eine Seitenlinie AB, bis sie der neuen AE gleich wird; errichte darüber, mit Beybehaltung der zweyten Seitenlinie, AC, ein neues, CE, und ziehe darin aus dem Anfangspuncte der ersten Seite die Diagonale AF. Sie schneidet auf der Richtung der zweyten Seitenlinie des anfänglichen Parallelogramms eine Länge, BG, ab, welche die zweyte Seitenlinie des gesuchten ist. Denn da (S. 239, 1.) $\frac{AB}{AE} = \frac{BG}{EF}$, so ist AB . EF, oder AB . AC = AE . BG oder AE . AH.

Eine andere Lösung derselben Aufgabe ist die nachstehende.

2. Um ein Parallelogramm (fig. 56.) AC in ein anderes, ihm gleichwinklichtes zu verwandeln, dessen eine Seitenlinie gegeben seyn soll, strecke man die Seitenlinien des ersten, wie AB, BC, indem BD = AC wird, in einer Richtung neben einander; die gegebene des zweyten, BE,

lasse man von ihrem Scheidepuncte, B, nach einer anderen Richtung, BE, ausgehen; beschreibe durch die Endpuncte dieser drey Linien, A, D, E, einen Kreis; und ergänze in ihm die dritte, BE, zur Sehne, dies gibt BF, die zweyte Seitenlinie des Parallelogramms. Denn es ist im Kreise (S. 264.) AB . BD = BE . BF.

3. Um ein Parallelogramm wie AC (fig. 57.) in ein anderes mit den nemlichen Winkeln, aber dabey gleichseitiges, zu verwandeln und dessen Seite zu finden, legt man seine Seitenlinien, AB, BC = BD, neben einander, beschreibe über ihrer Summe einen Halbkreis, und errichte aus ihrem Scheidungspuncte, B, ein Loth, aufsteigend bis in die Peripherie, BG. Dies ist die gesuchte Seite des zweyten Parallelogramms. Denn es ist (S. 263, 7.) AB . BD = $(BG)^2$. Sind beyde Parallelogramme rechtwinklicht, so ergibt der Satz die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat.

4. Um ein Parallelogramm, AD, dessen Seitenlinien AB = a, AC = b sind, in ein anderes, gleiche Winkel enthaltendes, dessen Seitenlinien, α und β, ein vorgeschriebenes Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{f}{g}$ beobachten sollen, zu verwandeln, hat man $ab = \alpha\beta$ und $\frac{f}{g} = \frac{\alpha}{\beta}$, woraus, durch Multiplication $\frac{abf}{g} = \alpha^2$, durch Division $\frac{abg}{f} = \beta^2$ folgt.

Um also eine Seitenlinie, α, des gesuchten Parallelogramms zu erhalten, mache man (fig. 59.) BA = a verlängernd, AE = f, und nehme in der Richtung des AC = b, eine Länge AF = g, führe durch die Puncte E, A, F einen Kreis, ergänze AF zur Sehne desselben durch AG, errichte über AG + AC einen Halbkreis, und erhebe in ihm aus A das Loth AH. Dieses wird $= \alpha$ seyn.

Denn im ersten Kreise ist (S. 265.) $\frac{AB . AE}{AF}$, d. h. $\frac{af}{g} = AG$; und im zweyten (S. 263, 7.) AG . AC, d. h. $\frac{af}{g} . b = (AH)^2$, welches also $= \alpha^2$ ist.

Man könnte, nur in der obigen Construction f und g verwechselnd, auch β durch dieselbe erhalten. Es genügt indessen, nur eine Seite des neuen Parallelogramms zu haben, und seine übrige Construction durch Hülfe des vorigen Satzes (S. 319, 1.) zu vollführen.

C. Vereinigung von Parallelogrammen.

1. Die Vereinigung zweyer Parallelogramme zu einem dritten vollzieht sich ohne Weiteres durch die obigen Betrachtungen. Man bringe sie zuvörderst auf gleiche Winkel zurück, stelle sie alsdann, wie AD und BF, über einer beliebigen Richtung neben einander, und verwandle das erste, AD, ohne seine Winkel zu ändern, so, daß es statt seiner aufstehenden Seitenlinie BD, die des zweyten, BE, erhält. Dies geschieht bekanntlich (S. 319, 1.), indem man das vermittelnde Parallelogramm ABEH bildet, dessen Diagonale BH

zieht, und durch K, ihren Durchschnittspunct mit der ihr entgegentretenden Seitenlinie CD des ersten Parallelogramms, eine Parallele, LKM, führt. Diese bildet ein neues, BM, welches sich mit dem zweyten der gegebenen, BF, zu einem einzigen dritten, MG, zusammenzieht.

2. Sollen zwey sich ähnliche Parallelogramme zu einem dritten, ihnen ähnlichen, vereinigt werden, also, wenn a, α, A die ersten, b, β, B die zweyten Seitenlinien der genannten Figuren sind, $ab + \alpha\beta = AB$, und dabey $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B}$ seyn, so ergibt die Multiplication des ab durch $\frac{a}{b}$, des $\alpha\beta$ durch $\frac{\alpha}{\beta}$, des AB durch $\frac{A}{B}$, sofort $a^2 + \alpha^2 = A^2$, die Division in eben der Ordnung $b^2 + \beta^2 = B^2$, man erhält also $A = \sqrt{a^2 + \alpha^2}$ und $B = \sqrt{b^2 + \beta^2}$.

Daraus entsteht, mit Zuziehung des pythagorischen Lehrsatzes, das merkwürdige Theorem.

Wenn zwey Parallelogramme ähnlich sind, mithin sich in ihnen, unter gleichen Winkeln, die Grundlinien, a und α, wie die Seitenlinien, b und β, verhalten, so gibt die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen Perpendikel jene Grundlinien darstellen, die Grundlinie, die eines anderen, worin jene Seitenlinien als Perpendikel auftreten, die Seitenlinie eines neuen Parallelogramms, welches bey gleichen Winkeln, wie die ihrigen, ihnen ähnlich, und die Summe ihrer Flächenräume ist.

3. Da Quadrate ähnliche Parallelogramme sind, so gilt der letzte Satz auch von ihnen, und kürzt sich, weil bey ihnen Grundlinie und Seitenlinie einerley sind, dahin ab: daß, wenn über den drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks Quadrate errichtet werden, die Fläche des über der Hypotenuse stehenden die Summe von den Flächen der beyden anderen, über den Perpendikeln aufgestellten, darbieten muß. Dieses ist der planimetrische Ausdruck des pythagorischen Lehrsatzes.

III. Vergleichungen, Verwandlungen und Vereinigung von Dreyecken.

1. Da ein Dreyeck ABC (fig. 60.) die congruente Hälfte eines Parallelogramms, AE, ist, welches mit ihm über derselben Basis, AB, steht, und (unter Höhe des Dreyecks ein Loth, CD, aus der Spitze auf die Richtung der Basis, unter Höhe des Parallelogramms ein Loth aus der Seite, welche der Basis gegenüberliegt, auf dieselbe, verstanden) gleiche Höhe über dieser Basis hat, so ist die Fläche eines Dreyecks die Hälfte von der eines Rechtecks, das mit ihm gleiche Basis und Höhe besitzt; es verhalten sich also die Flächen zweyer Dreyecke wie die Producte der Zahlen, welche, auf eine gemeinschaftliche Linieneinheit bezogen, Basis und Höhe für sie ausdrücken würden. Denn jenes anfängliche Parallelogramm, AE, kann sogleich in ein gleichgroßes Rechteck von derselben Basis und Höhe, AF, umgewandelt werden, dessen Hälfte also dem Dreyecke ACB auch an Fläche gleichkommen muß. Man kann also jedes Dreyeck in ein ihm an Fläche gleiches Rechteck verwandeln, wenn man diesem bey gleicher Höhe die

halbe Basis, oder bey gleicher Basis die halbe Höhe des Dreyecks gibt.

2. Da sich in ähnlichen Dreyecken, wenn man ähnlich liegende Seiten, AB, ab (fig. 61.) als Grundlinien für sie wählt, die Höhen CD, cd, wie die Grundlinien verhalten (welches die Aehnlichkeit der Dreyecke ACD, acd, sogleich ergibt), so kann für sie, statt $\frac{AB \cdot CD}{ab \cdot cd}$, kürzer $\frac{(AB)^2}{(ab)^2}$ gesetzt werden; ihre Flächen verhalten sich also wie die zweyten Potenzen der Zahlen, wodurch ähnlich liegende Seiten in ihnen, auf gemeinschaftliche Einheit bezogen, ausgedrückt werden, oder wie Quadratflächen, über diesen Seiten errichtet.

3. Aus dem Satze, daß jedes Dreyeck, ABC, als congruente Hälfte eines Parallelogramms ABDC (fig. 62.) angesehn werden kann, das eine Seitenlinie, AC, als Basis mit ihm gemein hat, und bis zu einer durch seine Spitze geführten Parallele mit dieser Basis, BD, hinaufreicht, folgt ferner, daß zwey Dreyecke, die, wie ABC, AEC, über derselben Basis AC stehn, und ihre Spitzen, D, E, der nemlichen Parallele mit der Basis finden, das eine als Hälfte von AD, das andere als Hälfte von AG, gleichen Flächenraum besitzen.

Auch das Umgekehrte gilt, weil sonst Parallelogramme über derselben Basis gleichen Flächenraum haben könnten, ohne zu der nemlichen Parallele mit ihr hinaufzureichen.

Vermöge dieses Satzes kann man also auf unzählig viele Arten ein Dreyeck, ABC, in ein anderes verwandeln, welches mit ihm gleiche Basis und Höhe hat,

unter Höhe den Abstand seiner Spitze von der Richtung seiner Basis, d. h. ein Loth aus dieser auf jene, BF, verstanden. Man darf dabey eine zweyte Seitenlinie, AE, nur daß sie nicht kürzer sey als jenes Loth, oder einen Winkel an der Basis, EAF, beliebig erwählen, oder das neue Dreyeck ein gleichschenklichtes werden lassen. Auch ist es eine unmittelbare Folge des Satzes, daß zwey Dreyecke, deren Grundlinien, als Theile einer größeren Linie, an einander grenzen, und die dabey einerley Höhe haben, zu einem von derselben Höhe, über der Summe ihrer Grundlinien, als Basis, zusammengezogen werden können.

4. Die Basis AB eines Dreyecks (fig. 63.) so zu ändern, daß es, bey gleichem Flächenraum, eine vorgeschriebene Höhe erhalte, sey DEF die Parallele mit der Basis, welche um die verlangte Höhe von ihr absteht. Sie schneide die Richtung des Schenkels AC, der vom Anfangspuncte der Basis ausgeht, in E. Aus diesem Durchschnittspuncte ziehe man durch den Endpunct der Basis eine Linie BE, und mit ihr durch die Spitze des Dreyecks eine Parallele, CG; der Durchschnitt derselben mit der Richtung der Basis ergibt den Endpunct der neuen Basis AG.

Denn, da die Dreyecke ECB und EBG, die Basis EB gemein haben, und ihre Spitzen, C, G, in einer Parallele mit der Basis, CG, liegen, so sind ihre Flächen gleich. Mithin, dem anfänglichen Dreyeck ACB, das erste, ECB abgenommen, das zweyte, EBG, zugelegt, oder umgekehrt ihm ECB zugefügt, und EBG von ihm abgezogen, erhält man,

der Fläche nach nicht geändert, AEG, die vorgeschriebene Höhe besitzend, und über der aus AB in AG übergegangenen Basis stehend.

5. Vermöge der beyden obigen Sätze kann man beliebig viele gegebene Dreyecke in ein einziges zusammenziehn, indem man sie so umwandelt, daß sie alle dieselbe Höhe besitzen, alsdann ihre Grundlinien in eine Richtung an einander reiht, und über ihrer Summe als Basis ein Dreyeck von derselben Höhe errichtet. Diese Umwandlung wird unnöthig, wenn die Dreyecke ähnlich seyn sollen. Sind A, a, $\mathfrak{A}$ ähnlich liegende Seitenlinien von ähnlichen Dreyecken, deren Flächen F, f, $\mathfrak{F}$, seyn mögen, und soll $F + f = \mathfrak{F}$ seyn, so hat man, da $F = \frac{A^2}{\mathfrak{A}^2}\,\mathfrak{F}$, und $f = \frac{a^2}{\mathfrak{A}^2} . \mathfrak{F}$ ist,

$$F + f = \left(\frac{A^2 + a^2}{\mathfrak{A}^2}\right) \mathfrak{F},$$

mithin, da diese Summe $= \mathfrak{F}$ seyn soll, $A^2 + a^2 = \mathfrak{A}^2$. Die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen Perpendikel die gegebenen A und a sind, gibt also $\mathfrak{A}$, sofern dieses als gesucht betrachtet wird.

IV. Verwandlungen von Vierecken.

1. Es gibt mancherley Arten ein Viereck in ein anders gestaltetes, oder in ein Dreyeck, ohne daß die Größe seines Flächenraums geändert würde, zu verwandeln. Zieht man in ihm (fig. 64.) eine Diagonale, AB, und mit ihr parallel durch seine beyden anderen Ecken, C, D, Parallelen, so darf man statt jedes der

beyden Dreyecke, ABC, ABD, unzählig viele andere setzen, wenn nur deren Spitzen in jene Parallelen fallen, und die vorige Diagonale, AB, die Basis bleibt; jeder Umsatz dieser Art erzeugt ein neues Viereck, oder, in den Fällen, wo von den beyden neuen, auf der Diagonale stehenden Dreyecken, wie AEB und ABF, die beyden aus demselben Endpuncte ihrer Basis ausgehenden Seitenlinien, AE, AF, in eine Richtung EAF fallen, ein Dreyeck BEF, welches dem Viereck an Fläche gleichkommt. Ist EAF, wie es beliebig geschehen kann, lothrecht auf AB genommen, so ist AB die Höhe dieses Dreyecks. Jedes Viereck ist also an Fläche einem Dreyeck gleich, dessen Höhe seine eigene Diagonale, dessen Basis der Abstand zweyer Linien ist, die parallel mit seiner Diagonale durch seine beyden übrigen Winkelpuncte gezogen sind.

Am einfachsten geschieht die Verwandlung des Vierecks in ein Dreyeck, wenn man das eine Diagonalendreyeck in ihm, wie ACB, behält, dessen eine Seite, AC, bis in die Richtung der gegenüberstehenden Parallele verlängert, und ihren Durchschnittspunct mit dieser zur Spitze des zweyten, ABG, macht.

In der Figur sind diese Beziehungen nur für Vierecke mit lauter auswärts gehenden Winkeln dargestellt; ein leichter Constructionsversuch kann zeigen, daß sie auch für die übrigen gelten.

2. Jedes Trapezium ABCD (fig. 65.) in ein Parallelogramm zu verwandeln, so daß dieses mit ihm zwischen denselben Parallelen enthalten ist, nehme man eine Linie, EF, durch den Halbirungspunct der einen aufstehenden Seite, AC, parallel mit der Grundlinie

gezogen, und in der anderen begrenzt, und ziehe durch ihre Endpuncte Parallelen in beliebiger Richtung, wie GI und HK, bis das Parallelogramm GIHK entsteht, welches so viel Fläche hat als das Trapezium. Dieser Satz ist Folge eines allgemeineren, welcher lehrt, daß, wenn ein Viereck zwey parallele Seiten hat, und eine der anderen, wie AC, um ihren Mittelpunct E gedreht wird, aber zwischen den vorigen Parallelen enthalten bleibt, wie GI, die Fläche des Vierecks sich nicht ändert, da der dadurch entstehende Zuwachs GEC, und der gleichzeitig erfolgende Verlust AEI, congruente Dreyecke sind.

3. Daß jedes Trapezium einem Dreyecke an Fläche gleich kommt, das mit ihm dieselbe Höhe hat, und dessen Basis die Summe seiner beyden parallelen Seiten ist, ergibt sich sogleich aus seiner Zerfällung durch eine gezogene Diagonale in zwey Dreyecke, die ihm an Höhe gleichen und seine parallelen Seiten zu Grundlinien haben.

V. Vergleichung und Vereinigung ähnlicher Vielecke.

Durch Hülfe der voranstehenden Sätze kann man auf mehrfache Art Vergleichungen beliebiger Vielecke bewerkstelligen, auch Verwandlungen und Vereinigungen derselben, namentlich solche, wobey sie sich zuletzt in ein einziges Dreyeck oder Parallelogramm zusammenziehn, durch bloße Construction zu Stande bringen. Es muß hier genügen, Betrachtungen dieser Art nur für ähnliche Vielecke auszuführen.

1. Es ist bekannt (S. 306, 1.), daß die Flächen ähnlicher Figuren in Dreyecke zerlegt werden können, so daß für jedes Dreyeck in der einen ein ihm ähnliches in der anderen existirt, sofern diese Dreyecke über ähnlich liegenden Seiten, A aus der einen, a aus der anderen dieser Figuren, als Grundlinien, gehörig errichtet werden. Die Flächen beyder Dreyecke müssen sich (S. 324, 2.) wie A^2 und a^2 zu einander verhalten, mithin jedes Dreyeck der einen Figur, $\frac{a^2}{A^2}$, von dem ihm ähnlichen der großen, also auch die Summe aller Dreyecke, welche die Fläche der ersten ausmachen, $\frac{a^2}{A^2}$ von der Summe aller derjenigen seyn, welche die der zweyten bilden. Es verhalten sich also, da alle Seiten eines Vielecks, zu den ihnen ähnlich liegenden eines zweyten, welches ihm ähnlich seyn soll, in demselben Verhältniß stehn, ähnliche Vielecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seitenlinien.

2. Sollen zwey sich ähnliche Figuren, von denen die eine über der Seite A die Fläche F, die andere über der ähnlich liegenden Seite a, die Fläche f besitzend, errichtet ist, zu einer dritten, deren Fläche, die Summe der ihrigen, und die ihnen selbst ähnlich ist, vereinigt werden, so sey die Seite dieser dritten, welche in ihr den Seiten A und a in den beyden ersten ähnlich liegt, = x. Da $f = \frac{a^2 F}{A^2}$, so ist $f + F = F + \frac{a^2}{A^2} F = \frac{A^2 + a^2}{A^2} . F$. Da ferner $f + F = \frac{x^2}{A^2} . F$, so folgt, daß $A^2 + a^2 = x^2$. Dies gibt

den allgemeinen Lehrsatz: wenn über den drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks als ähnlich liegenden, beliebige sich ähnliche Figuren errichtet werden, so beträgt die über der Hypotenuse, an Fläche, so viel, als die beyden über den Perpendikeln stehenden zusammengenommen.

VI. Grundregeln der genauen und genäherten Flächenberechnung.

A. Genaue Flächenberechnung.

Bey der eigentlich so genannten Flächenberechnung kommt es zwar auch darauf an, die Arealgrößen zweyer Figuren mit einander zu vergleichen. Indessen hat man dabey die eine von ihnen, die als Maaßstab dienen soll, folglich für gegeben und bekannt angenommen werden muß, völlig in seiner Gewalt. Man wählt sie also so einfach als möglich. Das heißt, man nimmt die Linie, welche als Linieneinheit gebraucht werden soll, um über ihr als Seite ein Quadrat zu errichten, und macht die Fläche dieses Quadrats zur Einheit, womit alle übrigen Flächen gemessen werden. Da bey ihm Basis und Höhe durch 1 ausgedrückt werden, so braucht man das Product aus diesen beyden Zahlen, weil es gleichfalls 1 seyn wird, nicht zu berechnen, und eben so wenig die anderen, ähnlich gebildeten, Producte dadurch zu dividiren, weil die Division mit der Einheit nichts verändert. Und so sprechen sich, un- dieser Voraussetzung, wenn man, wie es gewöhnlich der Kürze halber geschieht, unter Basis und Höhe, die unbenannten Zahlen versteht, wodurch, nach dem an-

genommenen Linienmaaßstabe, diese Linien in den Figuren ausgedrückt werden, die allgemeinen Regeln kürzer so aus.

1. Der Inhalt eines Rechtecks ist ein Product aus seiner Basis in seine Höhe. Daher der veraltete Name von rectangulum für ein Product, und latera für seine Factoren. Ist das Rechteck selbst ein Quadrat, so ist sein Inhalt die zweyte Potenz seiner Basis oder Seite, und eben darum hat man die zweyten Potenzen selbst Quadrate genannt.

2. Der Inhalt eines schiefen Parallelogramms ist ein Product aus seiner Basis in seine Höhe. Die Höhe stellt sich an einem, von der Basis auf die ihr gegenüberstehende Parallele gefällten, Lothe dar.

3. Der Inhalt eines Dreyecks ist ein Product aus der halben Basis in die Höhe, oder, was damit einerley ist, ein Product aus Basis und Höhe, zur Hälfte genommen. Höhe ist ein Loth aus dem Winkelpuncte des Dreyecks, welcher der als Basis angenommenen Seite entgegenliegt, auf diese Basis herab. Man kann dem gemäß auf dreyfache Art die Fläche eines Dreyecks berechnen.

Es ist indessen auch gestattet, die Fläche eines Dreyecks unmittelbar aus den Seiten desselben abzuleiten, da sich seine Höhe aus ihnen finden läßt.

Sey die Höhe eines Dreyecks ACB (fig. 61.) CD, so ist $(CA)^2 - (AD)^2 = (CB)^2 - (BD)^2 = (CB)^2 - (AB - AD)^2$. Ist also $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ und $AD = x$, so hat man $b^2 - x^2 =$

$a^2 - (c - x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$, woraus sogleich $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = x$ folgt. Da nun $CD^2 = b^2 - x^2$ ist, so hat man

$$CD = \sqrt{\left(b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{2c}\right)}.$$

Die Größe unter dem $\sqrt{}$ ist das Product

$$\left(b + \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}\right) \left(b - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}\right).$$

Der erste dieser Factoren ist

$$\frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2c};$$

der zweyte

$$\frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2c},$$

mithin ihr Product:

$$CD = \sqrt{\left(\frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{4c^2}\right)}$$

Folglich die Dreyecksfläche $\frac{AB \cdot CD}{2} =$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{((a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a))}.$$

Diese Regel hat den großen Vorzug, daß sie die Berechnung von aller Construction, nicht allein in Absicht auf die Darstellung der Höhe, sondern selbst auf die der Seiten unabhängig macht.

4. Eine aus der vorhergehenden abgeleitete Regel, die aber doch, ihres häufigen Gebrauchs wegen, zu den fundamentalen gezählt werden darf, betrifft das Trapezium. Man zerlege ein solches, wie AD (fig. 66.) durch eine Diagonale in zwey Dreyecke, ABC, CDB.

Wählt man zu Grundlinien dieser Dreyecke die beyden parallelen Seiten des Trapeziums, CD für das eine, AB für das andere, so kann ihre Höhe durch eine einzige Linie, die überhaupt den senkrechten Abstand der beyden Parallelen darstellt, wie CE, ausgedrückt werden. Es wird also die Fläche des ersten Dreyecks $\frac{CD \,.\, CE}{2}$, die des zweyten $\frac{AB \,.\, CE}{2}$, mithin die des ganzen Trapeziums $\frac{(CD + AB) \,.\, CE}{2}$. Das heißt, wenn unter Höhe des Trapeziums die Zahl verstanden werden soll, wodurch der Abstand seiner parallelen Seiten angegeben wird, die Fläche eines Trapeziums ist ein Product aus der Summe seiner parallelen Seiten in seine Höhe, zur Hälfte genommen.

Diese letzte Regel ist deswegen hervorgehoben worden, weil man oft, um eine zusammengesetzte Figur zu berechnen, nicht die Zerlegung derselben in Dreyecke, und also wiederholte Anwendung der dritten Regel, sondern Zerfällung derselben in Trapezien, und damit den Gebrauch der vierten, zu erwählen pflegt. In dem letzten Falle zieht man eine beliebige Linie, um auf sie Perpendikel aus allen Ecken der gegebenen Figur herabzufällen, die indessen nur bis zur völligen Begrenzung auf beyden Seiten durch den Umfang der Figur fortgezogen zu werden brauchen. Es ist am einfachsten, wenn man zu dieser Linie selbst eine Diagonale, die ganz ins Innere der Figur fällt, wie (fig. 67.) AD erwählen kann. Alsdann bilden die aus den Ecken der Figur senkrecht gegen sie gerichteten Transversalen, die erste und letzte, wie BL und EH abgerechnet, welche

Dreyecke abschneiden, so wie sie einander benachbart sind, trapezoïdalische Abschnitte in der Figur, wie BL und KF das Trapezium BKFL. Und das Stück der Hauptlinie, worauf sie senkrecht gerichtet sind, welches sie zwischen sich fassen, ergibt den Abstand der beyden parallelen Seiten dieses Trapeziums, so daß sogleich zur Messung der einzelnen Linien, und zur Berechnung der Flächenräume von den einzelnen Stücken der Fläche geschritten werden kann.

B. Genäherte Flächenberechnung.

1. Wenn die Flächenberechnung practisch ausgeübt werden soll, so muß sie sich zu einer Grenzbestimmung gestalten, da die practische Linienbestimmung nur Grenzen darbietet, zwischen denen die Zahlen liegen, deren Product, wenn man es berechnen könnte, den Flächenraum bestimmen würde.

Sind die Zahlen A und B unsichere Ausdrücke für die, deren Product eine Fläche geben würde, diese selbst aber zwischen bestimmten Grenzen enthalten, die erste zwischen $A + a$ und $A - \alpha$; die zweyte zwischen $B + b$ und $B - \beta$, so muß die Fläche, welche man sucht, zwischen $AB + aB + bA + ab$ und $AB - \alpha B - \beta A + \alpha\beta$ liegen.

2. Sind A und B Resultate unmittelbarer empirischer Linienmessung, so wird, bey jeder solchen, $a = \alpha = \frac{1}{n} A$ und $b = \beta = \frac{1}{n} B$ seyn, wobey n eine aus Beschaffenheit des angewendeten Messungsverfahrens

abzuleitende Zahl ist *); zugleich wird alsdann in der Regel der Bruch $\frac{1}{n^2}$ so klein seyn, daß AB . $\frac{1}{n^2}$ als Theil, verhältnißmäßig gegen AB, weggelassen werden darf. Unter dieser Voraussetzung fällt die Fläche zwischen AB $(1 + \frac{2}{n})$ und AB $(1 - \frac{2}{n})$; ist also schwankend um $\frac{2}{n}$ ihres eigenen Betrages, während jede der beyden Linien oder Zahlen, woraus sie bestimmt wird, es um $\frac{1}{n}$ des ihrigen sind.

3. Berechnet man den Flächeninhalt des Dreyecks unmittelbar aus den drey Seiten, vorausgesetzt, daß jede derselben um $\frac{1}{n}$ ihres angegebenen Betrages schwankend ist, so wird von den vier Factoren in dem Ausdruck der Fläche:
$\frac{1}{4}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$,
jeder mit $(1 + \frac{1}{n})$ multiplicirt, wenn man a, b, c jedes um $\frac{1}{n}$ vergrößert; mit $1 - \frac{1}{n}$, wenn man a, b, c jedes um $\frac{1}{n}$ verkleinert. Im ersten Falle tritt

*) Für den gewöhnlichen Feldmesser z. B. hat man $n = 500$ angenommen. Er muß dafür einstehen, daß keine unmittelbar von ihm gemessene Linie um $\frac{1}{500}$ größer oder kleiner ist, als er sie angibt; geringere Abweichungen legt man ihm nicht zur Last.

$\sqrt{(1+\frac{1}{n})^4} = (1+\frac{1}{n})^2$, welches, da $\frac{1}{n^2}$ wegfallen darf $=(1+\frac{2}{n})$; im zweyten $\sqrt{(1-\frac{1}{n})^4}$ $= (1-\frac{1}{n})^2 = (1-\frac{2}{n})$, als Factor in dem Ausdrucke der aus a, b, c berechneten Dreyeckfläche hinzu; sie geht also aus der Berechnung schwankend um $\frac{2}{n}$ ihres Betrages, mithin nicht mehr oder weniger genau hervor, als wenn sie aus Basis und Höhe abgeleitet wird.

VII. Theilung geradlinichter Polygone.

Die Fundamentalregeln der Flächenberechnung gestatten die Auflösung verschiedener Aufgaben, die das Umgekehrte der ursprünglichen sind, und, zum Behuf der Theilung gegebener Flächen in vorgeschriebene Theile, nicht entbehrt werden können.

1. Die einfachste ist die, wobey verlangt wird, aus dem bekannten Inhalte eines Rechtecks oder Parallelogramms, die Länge seiner Höhe zu finden. In diesem Falle braucht man nur den Inhalt durch die Basis zu dividiren, um die Höhe zu erhalten. Denn da, den Inhalt A, die Basis b, die Höhe h, genannt, $A = b . h$ war, so ist klar, daß $\frac{A}{b} = h$ seyn müsse. Soll das Rechteck ein Quadrat seyn, so braucht man nur aus dem Inhalte die Quadratwurzel zu ziehn,

um seine Seite zu finden. Da für das Quadrat $A = b^2$, so ist umgekehrt $b = \sqrt{A}$. In den meisten Fällen wird die Seite des Quadrats eine incommensurable Linie seyn.

2. Eben so leicht ergibt sich aus dem Inhalte des Dreyecks und seiner Grundlinie, die ihm gebührende Höhe. Der Inhalt des Dreyecks ist ein Product aus der halben Basis in der Höhe $A = \frac{bh}{2}$. Umgekehrt also muß der Inhalt, durch die halbe Basis dividirt, die Höhe geben: $h = A : \frac{b}{2} = \frac{2A}{b}$.

Die Aufgabe aber, über einer vorgeschriebenen Basis ein Dreyeck von gegebenem Inhalt zu verzeichnen, ist unbestimmt. Denn wenn man die Höhe des Dreyecks durch Hülfe der vorigen Formel auch würklich kennt, so weiß man dadurch nur den Abstand, welchen die Spitze desselben von seiner Basis haben wird. Man kann in diesem bestimmten Abstande eine Parallele mit der Basis ziehn, und behaupten, daß die Spitze des Dreyecks irgendwo in diese Parallele fallen müsse, aber gleichviel an welche Stelle, so daß dem gemäß unzählig viele Dreyecke der Aufgabe Genüge leisten werden. Eben diese Unbestimmheit macht die Auflösung einer anderen Aufgabe möglich, welche für die Theilung jedes beliebigen Polygons in vorgeschriebene Stücke die wesentlichste ist: von der Fläche eines Dreyecks, durch eine einzige, aus einem seiner Winkelpuncte gezogene, Linie, ein verlangtes Stück abzuschneiden.

Es sey ein Dreyeck, wie ABC (fig. 68.), gegeben, ein Winkelpunct A in ihm bezeichnet, von welchem die

Linie ausgehen soll, die ein vorgeschriebenes Stück von seiner Fläche abzuschneiden bestimmt ist, auch die Seite des Dreyecks, z. B. AB genannt, welche mit jener Transversale dieses Stück einschließen soll. Man stelle sich vor, daß es zunächst nur darauf ankomme, über jener Seite des Dreyecks, AB, als Basis, ein kleineres Dreyeck zu errichten, dessen Inhalt die gegebene Größe jenes abzuschneidenden Stücks, I, habe. Die Höhe, die diesem kleineren Dreyecke zukommen müßte, kann man durch die eben gegebene Formel berechnen $h = \frac{2I}{b}$. Man errichte auf der Basis, AB, ein Loth, DE, welches die Höhe darstellt, und ziehe durch seinen Endpunct eine Parallele mit der Basis. Diese wird unfehlbar in die Seite des anfänglichen Dreyecks eintreffen, welche dem Anfangspuncte der verlangten Theilungslinie A gegenübersteht, wie in der Figur die Seite BC durch diese Parallele im Punct, F, geschnitten wird. Dieser Durchschnittspunct allein darf unter der hier geforderten Bedingung, als Spitze des kleineren Dreyecks, welches über der vorgeschriebenen Basis, mit jenem gegebenen Inhalt, errichtet werden soll, angenommen werden, weil nur alsdann durch das Ziehen einer einzigen Transversale, AF, das kleinere Dreyeck vollendet, und von dem gegebenen größeren abgeschnitten wird.

3. Es gibt indessen noch eine andere, für die würkliche Ausübung viel einfachere Art, dieselbe Aufgabe zu lösen. Soll ein Dreyeck, wie ABC, durch eine Linie, die aus einem vorgeschriebenen Winkelpuncte, A, queer durch dasselbe geht, AF, in zwey vorgeschrie-

bene Stücke getheilt werden, so nehme man nur die Seite des Dreyecks, welche diesem Winkelpuncte gegenüberliegt, BC, um sie vorher in zwey Stücke zu theilen, BF und FC, welche genau in demselben Verhältniß zu einander stehn, wie die Stücke des gegebenen Dreyecks, welche über ihnen als Grundlinien liegen sollen. Die Transversale zu ihrem gemeinschaftlichen Grenzpuncte, AF, leistet die geforderte Theilung. Denn offenbar entstehn auf diese Art zwey Dreyecke, ABF, ACF, welche eine gemeinschaftliche Spitze A, und ihre Grundlinien BF, CF, zwar neben einander, aber doch in einer einzigen geraden Linie haben. Die Höhe dieser Dreyecke wird ebendeswegen völlig dieselbe seyn. Dreyecke von gleichen Höhen verhalten sich aber wie ihre Grundlinien, und diese hat man so eingerichtet, daß sie dem Verhältnisse gemäß sind, welches unter den Flächen der beyden kleineren Dreyecke stattfinden soll.

4. Wird aber den transversalen Theilungslinien eine bestimmte Richtung vorgeschrieben, so entstehn andere zum Theil schwierigere Betrachtungen. Ein einfacher, practisch sehr erheblicher Fall ist der, wo verlangt wird, von einem Dreyecke, durch eine Parallele mit seiner Basis, ein vorgeschriebenes Stück abzuschneiden. Alsdann kann der Satz, daß sich die Flächen ähnlicher Dreyecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, zur Auflösung der Aufgabe angewendet werden. Es sey der Inhalt des gegebenen Dreyecks A; des kleineren, ihm ähnlichen, welches durch eine Parallele mit seiner Basis von ihm abgeschnitten werden soll a, so verhält sich die Fläche des großen Dreyecks zu der des kleinen, wie die Quadrate ihrer ähnlich

liegenden Schenkel; umgekehrt daher diese Schenkel wie die Quadratwurzeln aus den Flächen. Man multiplicire also die Schenkel des großen Dreyecks mit dem Quotienten $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}} = \sqrt{\left(\frac{a}{A}\right)}$, und man wird die des gesuchten kleineren erhalten.

Eine ähnliche Aufgabe läßt sich für das Trapezium aufstellen: von einem solchen, durch eine Parallele mit den unter sich parallelen Seiten desselben, ein verlangtes Stück abzuschneiden. Da das Trapezium als ein unvollendetes Dreyeck angesehn werden kann, und sich aus Abmessungen an ihm der Inhalt dieses Dreyecks leicht berechnen läßt, so kann diese Frage auf die vorige zurückgeführt werden. Sie ist indessen, auch ohne diese Zurückführung, sofort arithmetisch lösbar. Sey (fig. 69.) von dem Trapezium AD, in dem AB = a, CD = b, die Höhe CE = h, durch eine Parallele mit AB ein kleineres FGCD, dessen Fläche gegeben, = I ist, abzuschneiden, und heiße dessen Höhe CH = x, so findet sich, CL parallel mit DB gezogen, das Dreyeck CFK ähnlich dem CAL, also seine Basis

$$FK = \frac{x}{h} AL = \frac{x}{h} (a - b),$$

seine Fläche also $\frac{x}{h} \cdot (a - b) \cdot \frac{x}{2}$. Diese mit der des Parallelogramms KD = CD . CH = bx vereint, gibt $I = \frac{(a - b)}{2h} x^2 + bx$, eine Gleichung des zweyten Grades, die geordnet $x^2 + \frac{2bh}{a-b} x = \frac{2Ih}{a-b}$

gibt. Nennt man, zur Abkürzung, $\frac{bh}{a-b} = m$, $\frac{2 Ih}{a-b} = n$, so wird sie $x^2 + 2mx = n$, gibt also (S. 86.) aufgelöst, $x = \sqrt{(m^2 + n)} - m$.

Indessen bleiben die weiteren Ausführungen dieser und ähnlicher Untersuchungen, der angewandten Geometrie, namentlich der practischen, in dem für sie besonders wichtigen Abschnitte von der Flächenberechnung und Flächentheilung, mit Recht überlassen. Sie muß auch die Lösung der zuletzt angeführten Aufgabe weiter entwickeln, da Theilung der Figuren durch lauter parallele Transversalen vielleicht am häufigsten erfordert wird, welche aber auch, da jede Figur durch Parallelen in Dreyecke und Trapezien zerlegt werden kann, nichts Anderes als die vorhin berührten Betrachtungen erfordert.

Aus demselben Grunde, um dessentwillen man die Betrachtung der Kreislinie in die Elementargeometrie aufgenommen hat, vergönnt man auch den Untersuchungen über die Kreisfläche (Quadratur des Kreises) eine Stelle in ihr. Beyde hängen sehr nahe zusammen, und die Quadratur würde leicht zu vollenden seyn, wenn die Rectification keiner Schwierigkeit unterworfen wäre. Dies erhellet aus den folgenden Sätzen.

1. Wenn P, Q, R arithmetische Ausdrücke bedeuten, die von einer unbestimmten ganzen Zahl n abhängen, so daß P niemals unter einen bestimmten endlichen

Werth hinabgehn kann, P stets größer ist als Q, Q stets größer als R; aber Q sowohl als R mit steigendem n um weniger, als irgend eine beliebige bestimmte Größe b beträgt, verschieden von P werden können, so liegt zwischen P und Q als Grenzen, dieselbe Zahl, welche zwischen P und R als solchen enthalten ist. Denn wenn behauptet würde, es liege zwischen P und Q die Zahl a, zwischen P und R eine andere, a + b, so nehme man n so, daß der Unterschied zwischen P und R geringer wird als b, wo es denn der zwischen P und Q um so mehr gleichfalls seyn muß. Die Zahl also, welche noch zwischen P und R liegt, so wie die, welche zwischen P und Q fällt, sind alsdann unfehlbar jede von P um weniger unterschieden, als b beträgt. Mithin kann ihr Unterschied nicht b seyn. Sie sind also, weil b jede beliebige Größe bedeuten darf, überall nicht verschieden.

2. Man zerlege, wie bey der Rectification, die Peripherie in n gleiche Theile, und stelle zwischen die Richtungen der Radien, welche einen solchen Bogen zwischen sich fassen, eine Sehne, s, und eine Tangente, t, wie (fig. 70.) AB und DE. Alsdann steht über der Sehne ein geradlinichtes Dreyeck ABC, über der Tangente ein ähnliches DEC; das erste ist kleiner als das Stück der Kreisfläche, welches über dem zugehörigen Bogen AB steht, das andere größer.

Der Inhalt des über der einzelnen Tangente stehenden Dreyecks ist: $\frac{t \,.\, r}{2}$; des über der einzelnen Sehne: $\frac{t \,.\, r}{2} \frac{s^2}{t^2} = \frac{s \,.\, r}{2} \,.\, \frac{s}{t}$. (S. 324, 2.)

Es liegt also die Kreisfläche stets zwischen $\frac{nt \cdot r}{2}$ und $\frac{ns \cdot r}{2} \cdot \frac{s}{t}$. Denkt man sich folglich ein Dreyeck von noch unbekannter Basis x, dessen Höhe dem Radius, dessen Fläche der des Kreises gleich seyn soll, so muß diese Dreyecksfläche, die $= \frac{x \cdot r}{2}$ ist, nothwendig zwischen $\frac{nt \cdot r}{2}$ und $\frac{ns \cdot r}{2} \cdot \frac{s}{t}$, also x zwischen nt, welches stets mehr als 6r ist, und $ns \cdot \frac{s}{t}$ fallen. Da aber $\frac{s}{t}$ im Fortgange der Sehnen und Tangentenberechnung der Einheit, mithin ns und $ns \cdot \frac{s}{t}$ der Gleichheit so nahe gebracht werden können als man will, so wie es mit nt und ns unter gleicher Voraussetzung, den Untersuchungen über die Rectification des Kreises zu Folge, der Fall ist, so muß, wenn x die Zahl seyn soll, welche zwischen nt und $ns \cdot \frac{s}{t}$ fällt, es zugleich diejenige seyn, welche zwischen nt und ns liegt. Dies ist aber einzig p, welche die Länge des Umfangs ausdrückt. Man hat also p = x, mithin die Kreisfläche $x = \frac{p \cdot r}{2}$.

Es ergeben sich daraus folgende Regeln der Flächenberechnung:

a. Um aus der gegebenen Länge des Durchmessers, d, oder Radius, r, die Größe der Kreisfläche, a, zu finden, ist:

$$a = \tfrac{1}{4}\pi \,.\, d^2 = d^2 \,.\, 0{,}7853981,$$
$$= \pi \,.\, r^2 = r^2 \,.\, 3{,}1415926.$$
$$\log a = 2\log d + 0{,}8950899 - 1,$$
$$= 2\log r + 0{,}4971499.$$

Die Flächen zweyer Kreise verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

b. Um aus der Länge der Peripherie, p, die Größe der Kreisfläche zu finden, ist:

$$a = \frac{p^2}{4\pi} = p^2 \,.\, 0{,}07957747,$$
$$\log a = 2\log p + 0{,}9007901 - 2.$$

c. Umgekehrt, um aus der Fläche des Kreises, a, seinen Umfang, p, oder Durchmesser, d, zu finden dienen folgende Formeln:

$$p = \sqrt{4\pi \,.\, a} = (\sqrt{a}) \,.\, 3{,}5449077;$$
$$\log p = \tfrac{1}{2}\log a + 0{,}5496049.$$
$$d = \sqrt{\frac{4a}{\pi}} = \sqrt{(a)} \,.\, 1{,}128379;$$
$$\log p = \tfrac{1}{2}\log a + 0{,}0524551.$$

d. Um einen Kreisausschnitt zu berechnen, der durch Radien gebildet wird, die unter einem bestimmten Winkel C zusammenstoßen, nimmt man, wenn d der Durchmesser ist: $\frac{C}{360°}\,\tfrac{1}{4}d^2\pi$, oder, wenn B die Länge des Bogens bedeutet, welcher dem Winkel C zugehört, $B \,.\, \tfrac{1}{4}d = B \,.\, \tfrac{1}{2}r$. Hier kann man sich also sehr bequem der Formeln aus 1, c, bedienen.

e. Um einen Kreisabschnitt d. h. das Stück seiner Fläche, welches zwischen Bogen und Sehne enthalten ist, zu finden, ziehe man (fig. 70.) zu den Enden der Sehne Radien, wie CA, CB; sie bilden einen Ausschnitt, von welchem nur das geradlinichte Dreyeck über der Sehne, ABC, weggenommen zu werden braucht, um den Abschnitt jenseits eben derselben zu erhalten.

f. Wenn ein Kreis ganz innerhalb eines anderen liegt, so bildet sich ein Raum mit doppelter Grenze, der zwischen ihren Peripherien enthalten ist, und berechnet wird, indem man von der Fläche des größeren die des kleineren abzieht. Dieser Raum stellt einen Kreisring dar, wenn beyde Kreise denselben Mittelpunct haben. Schneiden sich zwey Kreise, so haben sie eine Sehne gemein, die für jeden von ihnen einen Abschnitt bildet, dessen Größe nach e berechnet werden kann. Liegen die Mittelpuncte auf entgegengesetzten Seiten der Sehne, so gibt die Summe; liegen sie auf derselben Seite, so gibt die Differenz der Abschnitte einen Raum, der bloß durch zwey Bogen verschiedener Kreise begrenzt wird, und ein Mond, lunula, genannt zu werden pflegt.

Auch bey Kreisen, in der That deswegen, weil alle Kreise ähnliche Figuren sind, findet der pythagorische Lehrsatz seine Anwendung. Sollte man die Flächen zweyer gegebener Kreise, der eine mag r, der andere R zum Radius haben, zusammenaddiren, so daß deren Summe selbst als ein dritter Kreis erschiene, und sucht man den Radius desselben, x; so fordert die Aufgabe, daß $r^2\pi + R^2 . \pi = x^2 . \pi$, oder, nach Wegwer-

fung des gemeinschaftlichen Factors, daß $r^2 + R^2 = x^2$. Man trage also die Radien der gegebenen Kreise auf den Schenkeln eines rechtwinklichten Dreyecks, vom Scheitelpuncte aus, auf, und verbinde ihre Endpuncte. Die dadurch entstandene Hypotenuse ist der Radius des gesuchten Kreises. Daraus folgt von selbst, wie man sich zu verhalten hat, den Radius eines Kreises zu finden, dessen Fläche die Differenz von denen zweyer anderen gegebenen Kreise seyn soll. Man beschreibe beyde Kreise (fig. 71.) mit ihren verschiedenen Radien CG, CD, aus demselben Mittelpuncte würklich, wähle in der Peripherie des inneren einen beliebigen Punct, D, und lege an ihn eine Tangente, DG, die bis zur Begrenzung in der Peripherie des äußeren Kreises fortgeführt werde; sie ist der Radius des gesuchten Kreises, dessen Fläche dem concentrischen Kreisringe, d. h. dem Unterschiede der beyden gegebenen Kreise gleich seyn muß.

Grundlehren

der

benen Trigonometrie.

Einleitung.

Die Kenntniß des Zusammenhanges zwischen den Grundbestandtheilen eines Dreyecksumfanges ist erst dann vollendet, wenn sie sich in die arithmetische Darstellung der Verknüpfung auflöst, welche, diesem Zusammenhange correspondirend, zwischen den Zahlen stattfindet, wodurch jene Größen auf gemeinschaftliche Maaßeinheiten, deren hier zwey, die eine für Seiten, der andere für Winkel, als zum Grunde liegend anzunehmen sind, bezogen werden können.

Aus den bereits in der Geometrie entwickelten Lehren geht es leicht hervor, daß die auf dieses Ziel gerichtete Untersuchung am einfachsten zuerst gegen das rechtwinklichte Dreyeck gewendet wird. Der Zusammenhang unter den Zahlen, wodurch seine Seiten ausgedrückt werden mögen, ist bereits durch den pythagorischen Lehrsatz bekannt; alle übrigen Fragen, die nur noch bey ihm die Verbindungen zwischen Seiten und Winkeln betreffen können, reduciren sich auf eine einzige,

der einfachsten Art; und jedes andere Dreyeck läßt sich sogleich auf zwey rechtwinklichte zurückführen, so daß alle Beziehungen zwischen den Grundbestandtheilen seines Umfanges arithmetisch ausgedrückt werden können, sobald das Gleiche als möglich für die Grundbestandtheile im Umfange rechtwinklichter Dreyecke vorausgesetzt werden darf. Die würkliche Ausführung wird dieses sofort nachweisen.

Erstes Capitel.

rklärung und Realisirung der Grundbegriffe für die ebene Trigonometrie.

Begriffe von den trigonometrischen Functionen der Winkel.

Wenn die Winkel eines Dreyecks gegeben sind, so rf man überhaupt die Verhältnisse, in denen seine eiten gegen einander stehn, als abhängig von jenen inkeln, das heißt, als Functionen derselben betrachn. Am einfachsten geschieht dieses bey dem rechtwinkhten Dreyeck.

A. Die trigonometrischen Functionen für spitze Winkel.

Wenn man (fig. 1.) auf dem einen Schenkel eines Winkels, welcher zunächst als ein willkührlicher spitzer genommen werden mag, eine beliebige Länge CA abneidet, und aus ihr ein Loth auf die Richtung des anren Schenkels herabläßt, so sind, weil jener Winkel ch den dritten, A, des entstehenden rechtwinklichten reyecks CAB bestimmt, und durch die Winkel eines Drey's die Verhältnisse unter den Seiten desselben unabänder-

lich vorgeschrieben worden, alle Verhältnisse, welche unter je zwey Seiten des rechtwinklichten Dreyecks stattfinden können, durchaus abhängig von jenem Winkel, und gänzlich festgestellt durch ihn. Man hat in sofern jedem dieser Verhältnsse einen eigenthümlichen Namen beygelegt, welcher sein Bestimmtseyn durch den Winkel, zugleich aber die Lage der beyden Linien, aus deren Vergleichung es hervortreten soll, gegen diesen Winkel, und die Ordnung, in welcher sie verglichen werden sollen, anzuzeigen bezweckt. Die erste der drey hier in Frage kommenden Linien ist die willkührliche Länge, CA, auf dem einen Schenkel des vorliegenden Winkels, C, abgeschnitten; sie mag im Folgenden der Kürze wegen die Hypotenuse des Winkels heißen; die andere, das zwischen seinen Schenkelrichtungen herabgelassene Perpendikel, AB, kürzer: das gegenüberstehende Loth des Winkels; die dritte, das auf der durch den anderen Schenkel des Winkels bestimmten Richtung vom Scheitelpuncte anhebende, abgeschnittene Stück, CB, kürzer: das anliegende Loth des Winkels. Die aus diesen Linien gebildeten Verhältnisse werden im Allgemeinen trigonometrische Functionen des Winkels genannt. Im Einzelnen haben sie die im Nachstehenden aufgeführten eigenthümlichen Benennungen erhalten.

a. Definition der einzelnen trigonometrischen Functionen.

1. Das Verhältniß zwischen dem Lothe, welches einem Winkel gegenüberliegt, als auszumessender, und

ner Hypotenuse als Maaßgröße, heißt Sinus des inkels. $\frac{AB}{CA} = \sin C$.

Mit anderen Worten: die Zahl, womit man die ypotenuse eines Winkels zu multipliciren hat, um n gegenüberstehendes Loth zu erhalten, heißt Sinus s Winkels. $CA \sin C = AB$.

2. Das Verhältniß zwischen dem anliegenden Lothe nes Winkels, als der zu messenden, und seiner Hy- ptenuse, als der Maaßgröße, heißt der Cosinus des Zinkels. $\frac{CB}{CA} = \cos C$.

Oder: die Zahl, womit die Hypotenuse eines Win- :ls zu multipliciren ist, damit sein anliegender Per- endikel erhalten werde, wird Cosinus des Win- :ls genannt. $CA \cos C = CB$.

3. Das Verhältniß zwischen dem gegenüberstehenden othe eines Winkels als der zu messenden, und dem nliegenden Lothe desselben, als Maaßgröße, heißt die Tangente des Winkels. $\frac{AB}{CB} = \text{tang}\, C$.

Oder: die Zahl, womit man das anliegende Loth ines Winkels multipliciren muß, um sein gegenüberste- endes Loth zu erhalten, führt den Namen seiner Tan- ente. $CB \text{ tang}\, C = AB$.

4. Das Verhältniß zwischen dem anliegenden und genüberstehenden Lothe eines Winkels, das erste als uszumessendes, das letzte als Maaßstab gedacht, wird otangente des Winkels genannt.

Oder: die Zahl, mit welcher das gegenüberstehend Loth eines Winkels zu multipliciren ist, wenn di Größe seines anliegenden Loths erhalten werden soll führt den Namen Cotangente des Winkels.

$AB \cdot \cot C = CB.$

5. Das Verhältniß zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Lothe eines Winkels, die erste als Auszumessendes, das zweyte als Maaßstab gedacht, nennt sich Secante des Winkels. $\frac{CA}{CB} = \sec C.$

Oder: die Zahl, womit das anliegende Loth eines Winkels zu multipliciren ist, um seine Hypotenuse zu finden, heißt Secante des Winkels.

$CB \sec C = CA.$

6. Das Verhältniß zwischen der Hypotenuse und dem gegenüberstehenden Lothe eines Winkels, diese als auszumessende, jenes als Maaßgröße aufgestellt, heißt Cosecante des Winkels. $\frac{CA}{AB} = \operatorname{cosec} C.$

Oder: die Zahl, womit man das einem Win gegenüberstehende Loth zu multipliciren hat, um sei Hypotenuse zu erhalten, heißt Cosecante des Win kels. $AB \cdot \operatorname{cosec} C = CA.$

Die Namen der beyden letzten trigonometrisch Functionen werden selten gebraucht; noch weniger alten Benennungen sinus versus für 1 — cosinus un cosinus versus für 1 — sinus.

Daß die trigonometrischen Functionen sämmt unbenannte Zahlen werden müssen, ergibt sich von aus ihren Erklärungen, so wie, daß für spitze Wi

iese Zahlen durchaus positive seyn werden, da alle an-
liegenden Perpendikel, so wie alle gegenüberstehenden
n einstimmige Richtungen fallen; die Hypotenusen aber
edesmal auf der ursprünglichen Richtung des einen
Schenkels abgeschnitten, ebendeswegen immer als positiv
gedacht werden müssen.

b. Die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen eines spitzen Winkels.

1. Cotangente, Cosecante und Secante sind nur dadurch von Tangente, Sinus und Cosinus verschieden, daß dieselben Linien, nur bey jenen in umgekehrter Ordnung als bey diesen, paarweise verglichen werden; es folgt daraus ohne Weiteres, daß

$$\text{cotang} = \frac{1}{\text{tang}}; \quad \text{cosec} = \frac{1}{\sin}; \quad \sec = \frac{1}{\cos}.$$

2. Vermöge der Grunderklärungen ist $\sin C = \frac{AB}{CA}$ $= \cos A$ und $\text{tang}\, C = \frac{AB}{CB} = \text{cotg}\, A$. Da die beyden spitzen Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks sich zu 90° ergänzen, also $C = 90° - A$, so ist $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$, und ebenso $\text{tg}(90° - A) = \text{cotg}\, A$, $\text{cotg}(90° - A)$ $= \text{tg}\, A$.

3. Die Quadrate des Sinus und Cosinus für den emlichen Winkel machen zusammengenommen allemal . Denn der pythagorische Lehrsatz gibt $(AB)^2 +$ $CB)^2 = CA^2$, also, durch $(CA)^2$ dividirt, $\left(\frac{AB}{CA}\right)^2$

fung des gemeinschaftlichen Factors, daß $r^2 + R^2 = x^2$. Man trage also die Radien der gegebenen Kreise auf den Schenkeln eines rechtwinklichten Dreyecks, vom Scheitelpuncte aus, auf, und verbinde ihre Endpuncte. Die dadurch entstandene Hypotenuse ist der Radius des gesuchten Kreises. Daraus folgt von selbst, wie man sich zu verhalten hat, den Radius eines Kreises zu finden, dessen Fläche die Differenz von denen zweyer anderen gegebenen Kreise seyn soll. Man beschreibe beyde Kreise (fig. 71.) mit ihren verschiedenen Radien CG, CD, aus demselben Mittelpuncte würklich, wähle in der Peripherie des inneren einen beliebigen Punct, D, und lege an ihn eine Tangente, DG, die bis zur Begrenzung in der Peripherie des äußeren Kreises fortgeführt werde; sie ist der Radius des gesuchten Kreises, dessen Fläche dem concentrischen Kreisringe, d. h. dem Unterschiede der beyden gegebenen Kreise gleich seyn muß.

Grundlehren

der

ebenen Trigonometrie.

Einleitung.

Die Kenntniß des Zusammenhanges zwischen den Grundbestandtheilen eines Dreyecksumfanges ist erst dann vollendet, wenn sie sich in die arithmetische Darstellung der Verknüpfung auflöst, welche, diesem Zusammenhange correspondirend, zwischen den Zahlen stattfindet, wodurch jene Größen auf gemeinschaftliche Maaßeinheiten, deren hier zwey, die eine für Seiten, der andere für Winkel, als zum Grunde liegend anzunehmen sind, bezogen werden können.

Aus den bereits in der Geometrie entwickelten Lehren geht es leicht hervor, daß die auf dieses Ziel gerichtete Untersuchung am einfachsten zuerst gegen das rechtwinklichte Dreyeck gewendet wird. Der Zusammenhang unter den Zahlen, wodurch seine Seiten ausgedrückt werden mögen, ist bereits durch den pythagorischen Lehrsatz bekannt; alle übrigen Fragen, die nur noch bey ihm die Verbindungen zwischen Seiten und Winkeln betreffen können, reduciren sich auf eine einzige,

der einfachsten Art; und jedes andere Dreyeck läßt sich sogleich auf zwey rechtwinklichte zurückführen, so daß alle Beziehungen zwischen den Grundbestandtheilen seines Umfanges arithmetisch ausgedrückt werden können, sobald das Gleiche als möglich für die Grundbestandtheile im Umfange rechtwinklichter Dreyecke vorausgesetzt werden darf. Die würkliche Ausführung wird dieses sofort nachweisen.

Erstes Capitel.

Erklärung und Realisirung der Grundbegriffe für die ebene Trigonometrie.

I. Begriffe von den trigonometrischen Functionen der Winkel.

Wenn die Winkel eines Dreyecks gegeben sind, so darf man überhaupt die Verhältnisse, in denen seine Seiten gegen einander stehn, als abhängig von jenen Winkeln, das heißt, als Functionen derselben betrachten. Am einfachsten geschieht dieses bey dem rechtwinklichten Dreyeck.

A. Die trigonometrischen Functionen für spitze Winkel.

Wenn man (fig. 1.) auf dem einen Schenkel eines Winkels, welcher zunächst als ein willkührlicher spitzer angenommen werden mag, eine beliebige Länge CA abschneidet, und aus ihr ein Loth auf die Richtung des anderen Schenkels herabläßt, so sind, weil jener Winkel auch den dritten, A, des entstehenden rechtwinklichten Dreyecks CAB bestimmt, und durch die Winkel eines Dreyecks die Verhältnisse unter den Seiten desselben unabänder-

lich vorgeschrieben worden, alle Verhältnisse, welche unter je zwey Seiten des rechtwinklichten Dreyecks stattfinden können, durchaus abhängig von jenem Winkel, und gänzlich festgestellt durch ihn. Man hat in sofern jedem dieser Verhältnsse einen eigenthümlichen Namen beygelegt, welcher sein Bestimmtseyn durch den Winkel, zugleich aber die Lage der beyden Linien, aus deren Vergleichung es hervortreten soll, gegen diesen Winkel, und die Ordnung, in welcher sie verglichen werden sollen, anzuzeigen bezweckt. Die erste der drey hier in Frage kommenden Linien ist die willkührliche Länge, CA, auf dem einen Schenkel des vorliegenden Winkels, C, abgeschnitten; sie mag im Folgenden der Kürze wegen die Hypotenuse des Winkels heißen; die andere, das zwischen seinen Schenkelrichtungen herabgelassene Perpendikel, AB, kürzer: das gegenüberstehende Loth des Winkels; die dritte, das auf der durch den anderen Schenkel des Winkels bestimmten Richtung vom Scheitelpuncte anhebende, abgeschnittene Stück, CB, kürzer: das anliegende Loth des Winkels. Die aus diesen Linien gebildeten Verhältnisse werden im Allgemeinen trigonometrische Functionen des Winkels genannt. Im Einzelnen haben sie die im Nachstehenden aufgeführten eigenthümlichen Benennungen erhalten.

a. Definition der einzelnen trigonometrischen Functionen.

1. Das Verhältniß zwischen dem Lothe, welches einem Winkel gegenüberliegt, als auszumessender, und

seiner Hypotenuse als Maaßgröße, heißt Sinus des Winkels. $\frac{AB}{CA} = \sin C$.

Mit anderen Worten: die Zahl, womit man die Hypotenuse eines Winkels zu multipliciren hat, um sein gegenüberstehendes Loth zu erhalten, heißt Sinus des Winkels. $CA \sin C = AB$.

2. Das Verhältniß zwischen dem anliegenden Lothe eines Winkels, als der zu messenden, und seiner Hypotenuse, als der Maaßgröße, heißt der Cosinus des Winkels. $\frac{CB}{CA} = \cos C$.

Oder: die Zahl, womit die Hypotenuse eines Winkels zu multipliciren ist, damit sein anliegender Perpendikel erhalten werde, wird Cosinus des Winkels genannt. $CA \cos C = CB$.

3. Das Verhältniß zwischen dem gegenüberstehenden Lothe eines Winkels als der zu messenden, und dem anliegenden Lothe desselben, als Maaßgröße, heißt die Tangente des Winkels. $\frac{AB}{CB} = \operatorname{tang} C$.

Oder: die Zahl, womit man das anliegende Loth eines Winkels multipliciren muß, um sein gegenüberstehendes Loth zu erhalten, führt den Namen seiner Tangente. $CB \operatorname{tang} C = AB$.

4. Das Verhältniß zwischen dem anliegenden und gegenüberstehenden Lothe eines Winkels, das erste als Auszumessendes, das letzte als Maaßstab gedacht, wird Cotangente des Winkels genannt.

Oder: die Zahl, mit welcher das gegenüberstehende Loth eines Winkels zu multipliciren ist, wenn die Größe seines anliegenden Loths erhalten werden soll, führt den Namen Cotangente des Winkels.

AB . cot C = CB.

5. Das Verhältniß zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Lothe eines Winkels, die erste als Auszumessendes, das zweyte als Maaßstab gedacht, nennt sich Secante des Winkels. $\frac{CA}{CB} = \sec C$.

Oder: die Zahl, womit das anliegende Loth eines Winkels zu multipliciren ist, um seine Hypotenuse zu finden, heißt Secante des Winkels.

CB sec C = CA.

6. Das Verhältniß zwischen der Hypotenuse und dem gegenüberstehenden Lothe eines Winkels, diese als auszumessende, jenes als Maaßgröße aufgestellt, heißt Cosecante des Winkels. $\frac{CA}{AB} = \text{cosec}\, C$.

Oder: die Zahl, womit man das einem Winkel gegenüberstehende Loth zu multipliciren hat, um seine Hypotenuse zu erhalten, heißt Cosecante des Winkels. AB . cosec C = CA.

Die Namen der beyden letzten trigonometrischen Functionen werden selten gebraucht; noch weniger die alten Benennungen sinus versus für 1 — cosinus und cosinus versus für 1 — sinus.

Daß die trigonometrischen Functionen sämmtlich unbenannte Zahlen werden müssen, ergibt sich von selbst aus ihren Erklärungen, so wie, daß für spitze Winkel

diese Zahlen durchaus positive seyn werden, da alle anliegenden Perpendikel, so wie alle gegenüberstehenden in einstimmige Richtungen fallen; die Hypotenusen aber jedesmal auf der ursprünglichen Richtung des einen Schenkels abgeschnitten, ebendeswegen immer als positiv gedacht werden müssen.

b. Die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen eines spitzen Winkels.

1. Cotangente, Cosecante und Secante sind nur dadurch von Tangente, Sinus und Cosinus verschieden, daß dieselben Linien, nur bey jenen in umgekehrter Ordnung als bey diesen, paarweise verglichen werden; es folgt daraus ohne Weiteres, daß

$$\text{cotang} = \frac{1}{\text{tang}}; \quad \text{cosec} = \frac{1}{\sin}; \quad \sec = \frac{1}{\cos}.$$

2. Vermöge der Grunderklärungen ist $\sin C = \frac{AB}{CA} = \cos A$ und $\text{tang}\, C = \frac{AB}{CB} = \text{cotg}\, A$. Da die beyden spitzen Winkel eines rechtwinklichten Dreyecks sich zu 90° ergänzen, also $C = 90° - A$, so ist $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$, und ebenso $\text{tg}(90° - A) = \text{cotg}\, A$, $\text{cotg}(90° - A) = \text{tg}\, A$.

3. Die Quadrate des Sinus und Cosinus für den nemlichen Winkel machen zusammengenommen allemal 1. Denn der pythagorische Lehrsatz gibt $(AB)^2 + (CB)^2 = CA^2$, also, durch $(CA)^2$ dividirt, $\left(\frac{AB}{CA}\right)^2$

$+ \left(\frac{CB}{CA}\right)^2 = 1$, mithin, da $\frac{AB}{CA} = \sin C$ und $\frac{CB}{CA} = \cos C$, ist $\sin C^2 + \cos C^2 = 1$. Man hat folglich $\cos C = \sqrt{(1 - \sin C^2)}$ und $\sin C = \sqrt{(1 - \cos C^2)}$.

4. Aus Sinus und Cosinus ergeben sich sofort Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante. Denn da $\frac{AB}{CA} = \sin C$ und $\frac{CB}{CA} = \cos C$, so gibt die Umkehrung dieser Brüche $\frac{1}{\cos C} = \frac{CA}{CB}$, welches sec C; $\frac{1}{\sin C} = \frac{CA}{AB}$, welches cosec C; der Quotient derselben Brüche, entweder $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{AB}{CB}$, welches tang C, oder $\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{CB}{AB}$, welches cotg C, ursprünglichen Erklärungen zufolge, heißen soll. Daraus aber geht überhaupt hervor, daß aus dem Sinus eines Winkels, sobald er bekannt ist, die übrigen trigonometrischen Functionen desselben abgeleitet werden können, und daß allgemein aus jeder von ihnen alle übrigen durch leichte Rechnung gefunden werden mögen. So ist z. B.

$$\sin C = \frac{\text{tg } C}{\sqrt{(1 + \text{tg } C^2)}}; \quad \cos C = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tg } C^2)}}$$

B. Die trigonometrischen Functionen für rechte und stumpfe Winkel.

1. Wenn es bloß darauf ankäme, die Theorie des rechtwinklichten Dreyecks zu entwerfen, so brauchte nur

von spitzen Winkeln die Rede zu seyn; soll sich dieselbe aber auf alle Dreyecke erstrecken, so müssen die Begriffe der trigonometrischen Functionen als auf alle hohlen Winkel überhaupt anwendbar nachgewiesen werden.

Für den rechten Winkel wird AB = CA, CB = 0. Es ist also sein Sinus $\frac{AB}{CA} = 1$, sein Cosinus $\frac{CB}{CA} = \frac{0}{CA}$, seine Tangente $\frac{AB}{0}$, Cotangente $\frac{0}{AB}$, Secante $\frac{CA}{0}$, Cosecante $\frac{CA}{AB} = 1$. Ausdrücke wie $\frac{AB}{0}$ und $\frac{CA}{0}$ bedeuten keine bestimmte Zahl, sondern nur eine Grenze. Je kleiner bey einem unabänderlichen, so wie bey einem wachsenden Zähler der Nenner eines Bruchs wird, desto mehr steigert sich der Werth des Bruchs, der über jede Grenze zunehmen kann, wenn der Nenner so nahe an 0 rücken darf als man will. Dies ist der Sinn des abgekürzten Ausdrucks $\frac{AD}{0}$ oder $\frac{AC}{0}$ bezeichne Etwas unendlich großes.

2. Für einen stumpfen Winkel, wie aCB, gibt es allemal einen spitzen, aCb = ACB, der ihn zu zwey rechten ergänzt. Nimmt man die Hypotenuse des stumpfen, Ca, eben so lang als CA, die seines spitzen Nebenwinkels, ACB, so wird sein gegenüberstehendes Loth ab, der Größe und Richtung nach identisch mit dem jenes spitzen, AB; sein anliegendes Loth, Cb, der Größe nach identisch mit dem des spitzen, CB, aber der Richtung nach demselben widerstreitend. Setzt man

also in den trigonometrischen Functionen des stumpfen Winkels aCB, d. h. in $\frac{ab}{Ca}$ = sin aCB, $\frac{Cb}{Ca}$ = cos aCB, $\frac{ab}{Cb}$ = tg aCB, $\frac{Cb}{ab}$ = cot aCB, für Ca = CA, für ab = AB, für Cb = — CB, so erhält man sin aCB = $\frac{AB}{CA}$ = sin ACB; cos aCB = — $\frac{CB}{CA}$ = — cos ABC; tg aCB = $\frac{AB}{-CB}$ = — tg ACB und cot aCB = — $\frac{BC}{AB}$ = — cot ACB. Die trigonometrischen Functionen der stumpfen Winkel sind also der Größe nach mit denen ihrer spitzen Nebenwinkel identisch; die Sinus auch dem Zeichen nach, die Cosinus, Tangenten und Cotangenten nehmen für stumpfe Winkel das — Zeichen an. Von diesen Sätzen kommt besonders der, daß, unter C einen spitzen Winkel gedacht, $\sin(180^\circ - C) = \sin C$, $\cos(180^\circ - C) = -\cos C$, häufig vor.

Es verdient sorgfältig bemerkt zu werden, daß jedesmal, wenn der Sinus eines Winkels gegeben wird, und daraus auf den Winkel zurückgeschlossen werden soll, in Beziehung auf diesen die Zweydeutigkeit eintritt, daß er entweder spitz, oder, als Ergänzung dieses spitzen zu zwey Rechten, stumpf seyn kann.

Man richtet gewöhnlich die Construction, an der man die trigonometrischen Functionen eines Winkels darstellt und erklärt, etwas anders ein, als es im Vorhergehenden geschehen ist. Der Winkel (fig. 2.) sey ACB; man beschreibe mit einem willkührlichen Radius CA einen Kreis; nehme ACD = 90°, lege an A und D

Tangenten, und verlängere CB, bis sie jede von ihnen, die eine in T, die andere in U schneidet. Aus B falle das Loth BE auf den ersten Radius CA. Alsdann ist für den Radius CA, (d. h. durch ihn ausgemessen) BE der Sinus, CE der Cosinus, AT die Tangente, DU die Cotangente, CT die Secante, CU die Cosecante des Winkels ACB, oder des ihn messenden Bogens AB. Diese Erklärung unterscheidet sich bloß dadurch von der vorhin gegebenen, daß sie die durch einen Winkel bestimmten Verhältnisse zwischen den Seiten des rechtwinklichten Dreyecks, das ihn oder seinen Nebenwinkel enthält, nicht aus einem einzigen Dreyecke nimmt, wie z. B. aus BCE, sondern noch zwey andere ähnliche Dreyecke, TCA und UDC, zu Hülfe ruft, um aus jedem von ihnen zwey von den vorhin genannten Functionen abzuleiten. Dabey ist nun zwar das bequem, daß der Maaßstab, womit man die übrigen Linien ausmißt, immer derselbe, nemlich der Radius, ist; übrigens aber wird auf diesem Wege die Construction nebst der darauf gegründeten Erklärung verwickelter, und die Anwendung für den Anfänger mühsamer, als auf dem im Vorhergehenden angezeigten.

C. Berechnung der trigonometrischen Functionen.

Da alle übrigen Functionen eines Winkels aus dem Sinus desselben abgeleitet werden können, so kommt die Forderung, sie für jeden Winkel von gegebener Größe zu bestimmen, auf die der Ausmittelung des Sinus für jeden solchen zurück.

1. Die Aufgabe, den Sinus eines beliebigen Winkels zu finden, läßt sich auf die der Rectification des

Kreises zurückbringen, wenn diese so allgemein gefaßt wird, daß zu jedem Winkel am Centrum nicht allein die Länge der Sehne, sondern auch die des Bogens zwischen seinen Schenkeln gefunden werden soll. Denn das einem Winkel ACB gegenüberstehende Loth AB (fig. 3.) kann als Hälfte einer Sehne AD angesehn werden, welche einem Kreisbogen AED gehört, der, mit der Hypotenuse CA des Winkels, als Radius zwischen den Schenkeln eines andern doppelt so großen ACD beschrieben worden. So ist z. B., da die Sehne des Bogens, der $\frac{1}{6}$ der Peripherie ist, dem Radius gleich, hier also $= 1$, $\sin(\frac{1}{6} \cdot 180^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Daß mit dem Wachsen eines spitzen Winkels ein gleichzeitiges Zunehmen seines Sinus, mithin ein Abnehmen seines Cosinus verbunden seyn müsse, wobey der eine wie der andere ein echter Bruch bleibt, folgt daraus, daß dem größeren Bogen die größere Sehne gehört, alle Sehnen, die des Halbkreises ausgenommen, aber kleiner als der Durchmesser sind. Da die Sehnen mit ihren Bögen ins Unendliche abnehmen, so können auch die Sinus mit den Winkeln, welchen sie angehören, ins Unendliche verringert werden, wobey gleichzeitig die Cosinus der Einheit immer näher rücken. Für die Tangenten ergibt sich daraus, daß sie für beliebig kleine Winkel so gering werden können als man will, für Winkel unter 45° kleiner als 1, über 45° größer als 1 sind, und ins Unendliche wachsen, wenn die Winkel dem rechten so nahe rücken als man will; während für die Cotangenten das Umgekehrte stattfindet. Für 45° sind Tangenten und Cotangenten $= 1$.

2. Die Lehre vom Kreise enthält mehrere Sätze, die anderweitig wichtig für die Zwecke der Trigonometrie sind. Dahin gehört der Lehrsatz (S. 275, 1.), welcher aus der Sehne s eines gegebenen Bogens die Sehne seiner Hälfte berechnet, und für die letzte den Werth $\sqrt{2\,(1 - \sqrt{(1 - (\frac{1}{2}s)^2})}$ angibt. Ist ein gegebener Bogen $= \frac{m}{n}$ der Peripherie, so ist $\frac{1}{2}s$ der Sinus eines Winkels, der $\frac{m}{n} \cdot 180°$ beträgt. Ein neuer Bogen, halb so groß als der vorige, steht also dem Winkel von $\frac{m}{n} \cdot 90°$ gegenüber. Da nun jenem neuen Bogen als Sehne $\sqrt{2\,(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}s)^2})}$, angehört, so ist deren Hälfte also

$$\sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}s)^2}}{2}\right)} = \sin \frac{m}{n}\,90°.$$

Nennt man $\frac{m}{n}\;180° = C$, also $\frac{m}{n} \cdot 90° = \frac{1}{2}C$, so wird $\frac{1}{2}s = \sin C$, mithin $\sqrt{1 - (\frac{1}{2}s)^2} = \cos C$, und die Formel gibt $\sin \frac{1}{2}C = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos C}{2}\right)}$. Vermöge ihrer kann man für alle Winkel, die sich durch fortgesetztes Halbiren aus einem anfänglichen, dessen Sinus bekannt ist bilden, gleichfalls die Sinus finden.

3. Wenn die Sinus von zwey spitzen Winkeln, ACB = a, DCA = b (fig. 4.), die zur Summe selbst einen spitzen geben, bekannt sind, so kann man daraus den Sinus und Cosinus dieser ihrer Summe, DCB, finden.

Ist CD = 1, die Hypotenuse des Winkels DCA = b, DA sein gegenüberstehendes, AC sein anliegendes Loth, so hat man DA = sin b; CA = cos b. Ist CD auch die Hypotenuse des Winkels DCB = a + b, also alsdann DE dessen gegenüberstehendes Loth, so wird DE = sin (a + b) und CE = cos (a + b). Da aber DE und DA lothrecht auf CE und CA stehn, so schließen sie mit einander denselben Winkel als jene ein. Es ist also ADE = ACB = a. Nimmt man für den Winkel ADE als Hypotenuse DA, als gegenüberstehendes Loth AF, so hat man DF = DA cos ADF, d. h. sin b cos a; AF = AD sin ADF = sin a sin b. Setzt man für ACB = a als Hypotenuse CA, so kommt, als anliegendes Loth CB = CA cos ACB = cos a cos b, als gegenüberstehendes AB = EF = CA sin ACB = cos a . sin b. Daraus setzt sich zusammen DE = DF + (FE = AB) = sin a cos b + cos a sin b = sin (a + b) und CE = CB — (EB = AF) = cos a cos b — sin a sin b = cos (a + b).

Diese Sätze gelten auch, wenn a + b = 90°, weil alsdann sin b = cos a und cos b = sin a, mithin die erste Formel

$$\sin (a + b) = \sin 90^\circ = \sin a^2 + \cos a^2 = 1;$$

die zweyte

$$\cos (a + b) = \cos a \sin b - \sin a \cos a = 0$$

gibt. Sie bleiben auch richtig, wenn a und b spitze Winkel sind, die zusammen mehr als 90° betragen. Denn alsdann werden $\alpha = 90^\circ - a$ und $\beta = 90^\circ - b$ spitze Winkel seyn, deren Summe kleiner ist als 90°. Für sie gelten also die Formeln

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \text{ und}$$
$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Wenn man darin für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ setzt: $\sin(90^\circ - a)$ $\cos(90^\circ - a)$, $\sin(90^\circ - b)$ $\cos(90^\circ - b)$ d. h. $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$; für $\alpha + \beta$ also $180^\circ - (a + b$; für $\sin(\alpha + \beta)$ daher $\sin(a + b)$, für $\cos(\alpha + \beta)$ hingegen $-\cos(a + b)$; so erhält man aus dem Werthe von $\sin(\alpha + \beta)$ die Formel

$$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b;$$

aus dem von $\cos(\alpha + \beta)$ die Formel

$$-\cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b;$$

also, die Zeichen umgekehrt:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Ist endlich der eine Winkel, a, spitz, der andere, $b = 90^\circ + \varphi$, stumpf, so daß beyde zusammen einen stumpfen ausmachen, so ergibt sich, mit Hülfe des Satzes, das $\sin(90^\circ + \varphi) = \cos\varphi$ und $\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin\varphi$, die Gültigkeit der Formeln auch für diesen Fall.

4. Im Folgenden soll, wenn ein Bogen mit dem Radius 1 zwischen den Schenkeln eines Winkels φ als Centriwinkel beschrieben ist, die Länge dieses Bogens durch $\frown{\varphi}$ angedeutet werden. Hat man für einen Winkel $= 2C$, die Sehne s des mit einer Hypotenuse $= 1$ als Radius zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogens b gefunden, so ist $\frac{1}{2}s = \sin C$ (S. 361, 2.), folglich $s = 2 \sin C$; der Bogen b aber $2\frown{C}$. Man wird also den in der Geometrie (S. 280, 2.) bewiesenen Satz, daß $b > s$, aber $< s + \frac{1}{6}s^3$ ist, in den gegenwärtigen Zeichen so ausdrücken:

$$2\frown{C} > 2 \sin C, \text{ und}$$

$$2\frown{C} < 2 \sin C + \tfrac{1}{6}(2 \sin C)^3, \text{ kürzer:}$$

$$\frown{C} > \sin C \text{ und } \frown{C} < \sin C + \tfrac{2}{3}(\sin C)^3.$$

Man darf also für alle Winkel C, sobald die ihnen gebührenden $\overset{\frown}{C}$ so klein sind, daß $\overset{\frown}{C}{}^3$ unter die Kleinheitsgrenze fällt, bis zu welcher die nähernde Bestimmung getrieben werden soll (weil alsdann $\frac{1}{3} \sin C^3$ noch geringer seyn muß als $\overset{\frown}{C}{}^3$), $\sin C = \overset{\frown}{C}$ setzen. Man hat aber aus den Elementen der Geometrie für jeden Winkel C das ihm zugehörige $\overset{\frown}{C}$. Man bekommt also für alle Winkel dieser Größe den Sinus ohne weitere Rechnung. Und man wird für jeden, wofür $\overset{\frown}{C}{}^2$ unter die Kleinheitsgrenze fällt, $\cos C = 1$ zu setzen berechtigt seyn. Denn $\cos C$ ist $= \sqrt{(1 - \sin C^2)}$. Dieses fällt zwischen 1 und $1 - \frac{1}{2} \sin C^2$. Da $\frac{1}{2} \sin C^2$ der Annahme gemäß wegfallen soll, weil C^2 und noch mehr $\sin C^2$ unter der Kleinheitsgrenze liegt, so ist $\cos C = 1$ zu setzen.

5. Wächst ein Winkel a um einen neuen Theil $= b$, ist aber b so klein, daß näherungsweise $\sin b = \overset{\frown}{b}$, und also $\cos b = 1$ gesetzt werden darf, so wird alsdann näherungsweise in demselben Sinne

$$\sin(a + b) = \sin a + \overset{\frown}{b} \cdot \cos a, \quad \text{und}$$
$$\cos(a + b) = \cos a - \overset{\frown}{b} \sin a.$$

Es ist unmittelbare Folge aus diesem Satze, daß die Aenderungen, welche Sinus und Cosinus eines Winkels, a, erleiden, wenn er selbst Aenderungen, b, c, erhält, die so gering sind, daß $\sin b = \overset{\frown}{b}$, $\sin c = \overset{\frown}{c}$ gesetzt werden darf, den Aenderungen des Winkels proportional sind. Denn es ist

$$\frac{\sin(a + c) - \sin a}{\sin(a + c) - \sin a} = \frac{\overset{\frown}{c} \cdot \cos a}{\overset{\frown}{b} \cdot \cos a} = \frac{\overset{\frown}{c}}{\overset{\frown}{b}}, \quad \text{und ebenso}$$

$$\frac{\cos(a + c) - \cos a}{\cos(a + b) - \cos a} = \frac{-\overset{\frown}{c} \sin a}{-\overset{\frown}{b} \sin a} = \frac{\overset{\frown}{c}}{\overset{\frown}{b}} = \frac{c}{b}.$$

Es erhellet auf gleiche Weise aus demselben, daß bey gleichgroßer geringer Aenderung b, eines Winkels a, die gleichzeitige Aenderung seines Sinus, $\widehat{b}$ cos a, um desto unbeträchtlicher wird, je näher der Winkel selbst dem rechten kommt, da sich alsdann cos a immer mehr verringert; die seines Cosinus, $-\widehat{b}$ sin a, hingegen desto größer ausfällt, da sin a sich der Einheit gleichzeitig mehr und mehr nähert.

6. Durch Hülfe der beyden vorigen Sätze kann man, sofern alle Winkel als Vielfache eines beliebig klein zu wählenden, b, betrachtet werden dürfen, und bey ihren Functionen nicht unter eine bestimmte Kleinheitsgrenze hinab gegangen werden soll, die Sinus sowohl als die Cosinus derselben näherungsweise berechnen, indem man allmälig stets zu einem neuen Winkel, um b größer als der vorhergehende, fortschreitet.

Diese Untersuchungen sind für die Praxis in sofern nicht mehr von Erheblichkeit, falls vollständige trigonometrische Tafeln existiren, in denen für alle Winkel, welche im Gebrauch vorkommen könnten, die trigonometrischen Functionen mit hinlänglicher Näherung berechnet sind. Die Einrichtung der Tafeln muß aus ihnen selbst erkannt werden.

Zweytes Capitel.

Trigonometrische Auflösung der Dreyecke.

Dem Begriff der Trigonometrie zufolge, ist der Hauptzweck derselben, die Beziehungen, welche zwischen

den Zahlen stattfinden, wodurch die Grundbestandtheile eines Dreyecksumfangs, auf gemeinschaftliche Maaßeinheiten bezogen, ausgedrückt werden können, arithmetisch darzustellen. Wenn sie dieses, in Beziehung auf alle Fälle, in denen einer von jenen Grundbestandtheilen als abhängig, die übrigen als ursprünglich, zusammentreten, geleistet hat, so wird ihr eben dadurch auch die Möglichkeit gegeben, alle einzelnen Aufgaben aufzuzählen und zu lösen, in denen aus gegebenen, und zu solcher Absicht hinlänglichen, Stücken des Dreyecksumfangs irgend eines der übrigen gefunden werden soll.

I. Gleichungen zwischen den Grundbestandtheilen des Dreyecksumfangs.

A. Für das rechtwinklichte Dreyeck.

Die Aufgabe: den gegenseitigen Zusammenhang arithmetisch darzustellen, welcher zwischen ursprünglichen, hinlänglich bestimmenden Stücken des Dreyecksumfangs und jedem der übrigen von ihnen abhängigen stattfindet, löset sich für das rechtwinklichte Dreyeck ohne Weiteres durch das bloße Aufstellen entweder einer trigonometrischen Function, oder der Formel des pythagorischen Lehrsatzes. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich sogleich aus Folgendem. Sind jene drey Grundbestandtheile des Umfangs eines rechtwinklichten Dreyecks die drey Seiten, a, b, c, so hat man $a^2 + b^2 = c^2$. Der Zusammenhang zwischen zwey Seiten und einem Winkel, wird ausgedrückt, wenn man aus diesen Seiten einen Quotienten bildet, und ihn vermöge der Grunderklärungen als eine trigonometrische Function

jenes Winkels bezeichnet. Dabey sind nur drey Fälle denkbar, da, wenn (fig. 5.) A der Winkel seyn soll, die Seiten entweder a und c, oder b und c, oder a und b seyn müssen. Im ersten hat man $\frac{a}{c} = \sin A$, im zweyten $\frac{b}{c} = \cos A$, im dritten $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A$, oder $\frac{b}{a} = \cot A$, als Darstellung des gegenseitigen Zusammenhangs der gewählten Größen.

Es ist als besonders merkwürdig zu betrachten, daß der rechte Winkel selbst, bey dem Ausdrucke des Zusammenhangs unter den Grundbestandtheilen im Umfange des rechtwinklichten Dreyecks, ganz aus dem Spiele bleibt, so daß in den Gleichungen, welche jenen Zusammenhang darstellen, bloß die übrigen Grundbestandtheile, nur zwar jedesmal deren drey, in gegenseitiger Beziehung erscheinen.

B. Für das gleichschenklichte Dreyeck.

Das gleichschenklichte Dreyeck hat in sofern Aehnlichkeit mit dem rechtwinklichten, daß zu seiner Bestimmung nur zwey wirklich von einander unabhängige Stücke, gegeben seyn müssen. Sind es zwey Seiten, so ergibt sich die dritte, welche einer von ihnen gleich seyn muß, von selbst; sind es eine Seite und ein Winkel, so hat man auch die beyden übrigen Winkel; weil, der Natur des gleichschenklichten Dreyecks zufolge, durch einen Winkel alle gegeben sind.

Da in einem solchen nur vier wirklich verschiedene Bestandtheile liegen (indem zwey Seiten und zwey Winkel immer identisch sind), so ist die Menge der

Aufgaben, in denen aus zwey Stücken ein drittes zu finden gefordert wird, nicht beträchtlich. Bey der Auflösung einer jeden solchen Aufgabe muß eine Gleichung zwischen drey Stücken des gleichschenklichten Dreyecks gegeben seyn. Es lassen sich aber nur zwey wirklich verschiedene Gleichungen dieser Art denken. Die drey Größen, welche in ihr vorkommen müssen, können entweder die Basis, ein Schenkel, und der Winkel an der Spitze, oder es können die Basis, ein Schenkel, und ein Winkel an der Basis seyn. Hat man eine solche Gleichung erst gefunden, so ist es leicht, für jeden Fall, wo zwey von den Größen, die in ihr vorkommen, gegeben, die dritte aber gesucht seyn sollte, eine auflösende Formel aus ihr abzuleiten.

Man fälle (fig. 6.) aus der Spitze des gleichschenklichten Dreyecks ACB ein Loth, AD, auf die Basis. Es halbirt sowohl den Winkel an der Spitze, A, als die Basis BC. So ist der Winkel $BAD = \frac{1}{2} BAC$ und $BD = \frac{1}{2} BC$. Nun aber hat man im rechtwinklichten Dreyecke BAD (n. 1) $\frac{BD}{BA} = \sin BAD$, oder anders ausgedrückt $\frac{\frac{1}{2} BC}{BA} = \sin(\frac{1}{2} BAC) = \sin \frac{1}{2} A$, eine Gleichung zwischen der Basis, BC, einem Schenkel, BA, und dem Winkel an der Spitze, A. Man hat in eben diesem Dreyecke $\frac{BD}{BA} = \frac{\frac{1}{2} BC}{BA} = \cos B$, die zweyte Gleichung, worin die Basis, BC, ein Schenkel, BA, und ein Winkel an der Basis, B, vorkommen.

C. Für das Dreyeck im Allgemeinen.

1. Jedes Dreyeck, welches nicht an seiner Basis einen rechten Winkel hat, gibt, wenn man auf die Richtung dieser Basis aus der ihr gegenüberliegenden Ecke ein Loth herabläßt, zur Entstehung von zwey rechtwinklichten Veranlassung. Die Schenkel desselben, wie CA und CB (fig. 7, 8.), werden Hypotenusen; die Winkel an seiner Basis, wenn beyde spitz sind, wie A und B (fig. 7.), oder der Nebenwinkel eines solchen, wenn er stumpf seyn sollte, wie ABC (fig. 8.), werden Winkel in jenen rechtwinklichten; seine Basis AB wird entweder (fig. 7.) die Summe, oder (fig. 8.) die Differenz von den Grundlinien AD, BD ebenderselben, die alsdann eine gemeinschaftliche Höhe, CD, besitzen.

Man erhält also aus beyden rechtwinklichten Dreyecken, durch Stücke, die sie mit den anfänglichen gemein haben, ihre gemeinschaftliche Höhe sowohl als ihre Grundlinien.

Die Höhe ist dem Begriff des Sinus gemäß, wenn A und B beyde spitz sind, entweder CA sin A, oder CB sin B, jenachdem sie aus dem Dreyeck CAD oder dem CBD bestimmt wird. Auch dann, wenn einer von den Winkeln an der Basis des rechtwinklichten Dreyecks, wie (fig. 8.) ABC = B, stumpf seyn sollte, bleibt diese Regel. Denn alsdann ist im Dreyeck CBD, CB sin CBD = CD. Aber der Winkel CBD ist Nebenwinkel von ABC = B, mithin (S. 357, 2.) sin CBD = sin B, und also CD = CB sin B.

Drückt man ebenso auch die Grundlinien der rechtwinklichten Dreyecke aus, um aus ihnen die des anfänglichen zusammenzusetzen, so hat man, falls die

Winkel A und B beyde spitz sind, CA cos A = AD, CB cos B = BD; falls der eine, B, ein stumpfer seyn soll, bleibt CA cos A = AD, aber es wird CB cos CBD = CD. Da CBD, wenn das im anfänglichen Dreyeck an der Ecke B liegende ABC schlechthin B heißen soll, 180° — B ist, und (S. 357, 2.) cos (180° — B) = — cos B, so hat man alsdann — CB cos B = CD.

2. Die Verbindung der beyden vorliegenden Dreyecke, wodurch der Zusammenhang unter den Grundbestandtheilen im Umfange des anfänglichen ausgedrückt wird, ergibt sich sogleich, wenn man die Werthe ihrer gemeinschaftlichen Höhe sich gleich, CA sin A = CB sin B, ansetzt, und die Summe oder Differenz ihrer Grundlinien als gleich der Grundlinie des anfänglichen aufstellt. Sind die Winkel A und B an dieser spitz, so wird AB = AD + DB; ist der eine, wie B (fig. 8.), stumpf, so wird AB = AD — BD, und so findet sich, für AD und BD ihre Werthe gesetzt, im ersten Fall AC cos A + BC cos B = AB; im zweyten AC cos A — (— BC cos B) = AB, welche beyden Ausdrücke identisch die nemlichen sind.

Setzt man CA = b, CB = a, AB = c, so drücken sich die eben gefundenen Resultate durch die beyden Formen a sin B = b sin A (I)
und a cos B + b cos A = c (II)
aus, welche als Grundbeziehungen *) unter den Be-

*) Es ist nicht ohne Interesse, über die Form dieser Gleichungen zu reflectiren. Die erste derselben könnte man eine unbedingte nennen, in sofern als, wenn durch ihre Vermittlung eine der in ihr enthaltenen Größen ausgedrückt

standtheilen eines Dreyecksumfangs angesehn werden können.

3. Aus ihnen ergeben sich sofort diejenigen Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen je vier verschiedenen Stücken eines Dreyecksumfanges darstellen, und es eben dadurch möglich machen, alle die Aufgaben zu lösen, bey denen aus drey derselben, als mit unbedingter oder beschränkter Willkühr gewählten Stücken, das vierte, durch jene drey bestimmte, gefunden werden soll. Es kann der letzteren nur drey geben, da, der Natur des Dreyecks gemäß, entweder drey Seiten und ein Winkel; oder zwey Seiten und die beyden ihnen gegenüberstehenden Winkel; oder zwey Seiten nebst einem Winkel,

wird, jede der übrigen unzählig viele, beliebig zu wählende Werthe erhalten. Die zweyte Gleichung hingegen würde alsdann eine bedingte heißen, weil, indem sie dienen kann, aus vier Stücken des Dreyecksumfangs ein fünftes zu berechnen, nur drey von jenen vier Stücken beliebig genommen werden dürfen, dadurch das vierte vorgeschrieben wird, und nur unter der Voraussetzung, daß es dem gemäß bestimmt worden, aus ihm und dem anderen jenes fünfte gefunden werden kann. Solcher bedingten Gleichungen lassen sich viele bilden. Wenn z. B. aus der ersten Fundamentalgleichung $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$, und $\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$ folgt, so geben beyde Sätze durch Addition oder Subtraction verbunden $\frac{b \pm c}{a} = \frac{\sin B \pm \sin C}{\sin A}$, wodurch offenbar ein Zusammenhang zwischen den sechs Grundbestandtheilen des Dreyecksumfangs ausgedrückt ist.

den sie einschließen, und einem anderen, den sie nicht einschließen, gewählt werden müssen, wenn vier Stücke eines Dreyecks, unter denen in der That gegenseitiger Zusammenhang stattfindet, zusammengestellt werden sollen. Man pflegt sie die drey Hauptgleichungen der Trigonometrie zu nennen. Ihre Ableitung ist die folgende:

α. Die Grundbeziehung (I) d. h. $a \sin B = b \sin A$, ist zugleich die erste Hauptgleichung, zwischen zwey Seiten, a und b, und den ihnen gegenüberstehenden Winkeln, A und B.

β. Zieht man aus ihr eine Seite, $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, und setzt man deren Werth in (II), so kommt:

$$a \cos B + \frac{a \sin B \cos A}{\sin A} = c;$$

die zweyte Hauptgleichung, zwischen zwey Seiten, a und c; einem Winkel, B, den sie einschließen; einem zweyten, A, den sie nicht einschließen.

γ. Zieht man endlich aus (I) einen Winkel $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, woraus sogleich $\cos B = \sqrt{(1 - \sin B^2)}$ $= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2 \sin A^2}{a^2}\right)} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 \sin A^2)}}{a}$, und substituirt man dieses in (II), so findet sich

$$b \cos A + \sqrt{(a^2 - b^2 \sin A^2)} = c;$$

die dritte Hauptgleichung, zwischen den drey Seiten, *a*, b, c, und einem Winkel A. Die Radicalgröße

muß dabey das $+$ Zeichen erhalten, wenn B ein spitzer, das $-$ Zeichen, wenn B ein stumpfer seyn soll.

II. Lösung aller Aufgaben, wobey aus gegebenen unabhängigen, bestimmenden Stücken des Dreyecksumfangs eines der übrigen gesucht wird.

A. Für das rechtwinklichte Dreyeck.

Diese Aufgaben lassen sich unter drey Classen bringen, sofern man dabey auf die Data zunächst Rücksicht nehmen will.

Bey der ersten Classe sind gegeben zwey Seiten, gesucht die dritte Seite. Diese Classe hat zwey Fälle unter sich. Entweder es sind gegeben die Perpendikel a, b, gesucht die Hypotenuse c, und alsdann ist:

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)};$$

oder es ist gegeben die Hypotenuse, c, und das eine Perpendikel, a, gesucht das andere, b, und alsdann hat man: $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$.

Bey der zweyten Classe sind gegeben zwey Seiten, gesucht ein Winkel. Man kann dabey ferner drey verschiedene Fälle unterscheiden.

Entweder es ist gegeben für den gesuchten Winkel A, seine Hypotenuse, c, sein gegenüberstehendes Loth, a, und alsdann hat man: $\sin A = \frac{a}{c}$;

oder es ist gegeben zur Bestimmung des Winkels A, seine Hypotenuse, c, sein anliegendes Loth, b, und in diesem Falle ist: $\cos A = \frac{b}{c}$;

oder endlich es ist gegeben, um den Winkel A zu finden,

sein anliegendes Loth, b, und sein gegenüberstehendes, a, alsdann erhält man:

$$\mathrm{tg}\,A = \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad \mathrm{cotg}\,A = \frac{b}{a}.$$

Bey der dritten Classe sind gegeben eine Seite und ein Winkel, gesucht eine der anderen Seiten. Geht man auch hier ins Einzelne, so kann man sechs verschiedene Fälle unterscheiden, die sich auf nachstehende Art zusammenfassen lassen.

Entweder es ist gegeben ein Winkel, A, und seine Hypotenuse, c. Wird alsdann gesucht sein gegenüberstehendes Loth, so hat man: $c \sin A = a$; wird gesucht das gegenüberstehende: $c \cos A = b$. Oder es ist gegeben ein Winkel, A, und sein gegenüberstehendes Loth, a. Soll daraus gefunden werden sein anliegendes Loth, b, so ist $b = a.\mathrm{cotg}\,A$; wird seine Hypotenuse, c, gesucht, $c = a \operatorname{cosec} A = \frac{a}{\sin A}$. Der letzte Ausdruck ist der practisch brauchbare. Oder es ist gegeben ein Winkel, A, und sein anliegendes Loth, b. Wenn aus diesen Datis sein gegenüberstehendes Loth, a, gesucht wird, so muß $a = b\ \mathrm{tg}\,A$; wenn seine Hypotenuse, c, so muß $c = b \sec A = \frac{b}{\cos A}$ gesetzt werden.

Es mag beyläufig bemerkt werden, daß die Aufgaben der ersten Classe am leichtesten durch Rechnung gelöst werden, wenn man bey der ersten, wo $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ ist, erst aus $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,A$, und alsdann aus $\frac{a}{\cos A} = c$, das Gesuchte ableitet; bey der zwey=

ten $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$, da $c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$, das Gesuchte $b = \sqrt{((c + a)(c - a))}$ setzt. Weitere Erleichterungen des Rechnens sind bey der Auflösung des rechtwinklichten Dreyecks nicht möglich.

B. Für das gleichschenklichte Dreyeck.

Da es für ein solches nur zwey Gleichungen gibt, wodurch der Zusammenhang zwischen zwey beliebigen, hier zur Bestimmung hinreichenden Stücken und einem der übrigen dargestellt wird: $\frac{\frac{1}{2} BC}{BA} = \sin \frac{1}{2} A$ die erste, und $\frac{\frac{1}{2} BC}{BA} = \cos B$ die zweyte, so ergeben sich folgende Aufgaben und Auflösungen.

I. Die erste Gleichung faßt drey Aufgaben und ihre Auflösungen in sich.

α. Es sey gegeben die Basis, BC, und ein Schenkel, BA, man sucht den Winkel an der Spitze. Hier gibt die Gleichung selbst, ohne weitere Verwandlung, die Formel: $\frac{\frac{1}{2} BC}{BA} = \sin \frac{1}{2} A$.

Sie kann bequem durch Logarithmen berechnet werden; der Winkel, den sie geben soll, ist gewiß spitz; man muß aber nicht vergessen, ihn zu verdoppeln, wenn man A selbst haben will.

β. Es sey gegeben der Winkel an der Spitze, A, und ein Schenkel, BA; man sucht die Basis BC. Eine leichte Verwandlung gibt die Formel:

$$BC = 2 BA \sin \frac{1}{2} A.$$

γ. Es sey gegeben die Basis, BC, und der Winkel an der Spitze, A; gesucht ein Schenkel, BA. Alsdann ist die Formel: $BA = \frac{\frac{1}{2} BC}{\sin \frac{1}{2} A}$.

Die erste Formel wird oft gebraucht bey der Messung eines gegebenen Winkels, wo man nemlich auf seinen Schenkeln beliebige, aber gleiche, Stücke abschneidet, ihre Endpuncte verbindet, die dadurch entstandene Basis des gleichschenklichten Dreyecks mißt, und daraus den Winkel an der Spitze berechnet; die zweyte bey der Verzeichnung eines Winkels von vorgeschriebener Größe, indem man seine Schenkel beliebig, aber gleichlang, annimmt, die Basis ihm gegenüber berechnet, und nun durch Hülfe der bekannten drey Seiten das Dreyeck construirt, worin er liegen muß. Der geradlinichte Transporteur, und ältere geometrische Werkzeuge zur Winkelmessung, gründen sich auf dieses Verfahren.

II. Die zweyte Gleichung enthält auch drey Fälle.

α. Gegeben die Basis, BC, und ein Schenkel, BA; gesucht ein Winkel an der Basis, B. Die Formel ist:

$$\cos B = \frac{\frac{1}{2} BC}{BA}.$$

β. Gegeben die Basis, BC, und ein Winkel an ihr, B; gesucht ein Schenkel, BA. Die Formel:

$$BA = \frac{\frac{1}{2} BC}{\cos B}.$$

γ. Gegeben ein Schenkel, BA, und ein Winkel an der Basis, B; gesucht die Basis, BC. Die Formel ist:

$$BC = 2 BA \cos B.$$

C. Für das Dreyeck im Allgemeinen.

Man erhält alle diese Aufgaben nebst ihren Lösungen am kürzesten, wenn man die drey Hauptgleichungen, die den Zusammenhang unter je vier Stücken des Dreyecksumfangs ausdrücken, so bearbeitet, daß man allmälig jede der darin enthaltenen Größen als gesucht, gleichzeitig die drey übrigen als gegeben ansieht, und alsdann die Gleichung in diesem Sinne zur Auflösung bringt.

α. Die erste Hauptgleichung: $a \sin B = b \sin A$, ergibt auf solche Art folgende Aufgaben und Auflösungen.

1. Aus zwey Winkeln, A, B, und der Gegenseite des einen, b, die des anderen, a, zu finden.

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

2. Aus zwey Seiten, a, b, und dem Gegenwinkel der einen, A, den der anderen, B, zu finden.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Da man nur den Sinus von B findet, so läßt es die Formel unbestimmt, ob B spitz oder stumpf ist, worüber aus anderweitigen Daten entschieden werden muß.

Wollte man in der ersten Hauptgleichung noch ferner b und zuletzt A als unbekannt ansehn, so würden sich dabey nur die beyden vorigen Aufgaben mit anderen Zeichen wiederholen.

β) Die zweyte Hauptgleichung ist ursprünglich in der Gestalt: $a \cos B + a \sin B \frac{\cos A}{\sin A} = c$ abgeleitet worden. Man kann sie sofort auf zwey Arten zusammenziehn. Entweder indem man für $\frac{\cos A}{\sin A}$ setzt $\cot g A$, wo sie $a \cos B + a \sin B \,.\, \cot A = c$ wird. Oder, wenn man den Divisor $\sin A$ fortschafft und dann für $\sin A \cos B + \cos A \sin B$ das Gleichgeltende $\sin (A + B)$ substituirt (S. 361, 3.), wodurch sie $a \sin (A + B) = c \sin A$ wird. Aus ihr ergeben sich nachstehende Aufgaben und Auflösungen.

3. Aus zwey Seiten, a, c, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel B, einen der anderen Winkel, A, zu finden.

$$\cot g A = \frac{c - a \cos B}{a \sin B}, \quad \text{oder } \operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B}.$$

4. Aus zwey Seiten, a, c, und dem Gegenwinkel der einen, A, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel, B, zu finden.

$$\sin (A + B) = \frac{c \sin A}{a};$$

daraus findet sich A + B, und davon das gegebene A abgezogen, B.

Da A + B, sofern es aus sin (A + B) gefunden wird, zweydeutig ist, und spitz oder stumpf seyn kann, so wird es A auch, und ist desfalls eine anderweitige Bestimmung nöthig.

Eigentlich ist diese Lösung indirect. Die directe läßt sich erhalten, wenn man in der ersten Form der

zweyten Hauptgleichung: $c = a \cos B + a \sin B \cot A$, statt $\cos B$ setzt $\sqrt{(1 - \sin B^2)}$, alsdann $\sin B$ als unbekannte Größe betrachtet, und aus der Gleichung sucht. Die Lösung wird weitläuftig; ihr Resultat

$$\sin B = \frac{\sin A}{a} (c \,.\, \cos A \pm \sqrt{(a^2 - c^2 \sin A^2)})$$

unbequem zum Gebrauch; und deswegen pflegt diese Formel selten angeführt zu werden.

5. Aus zwey Winkeln, A, B, und der Gegenseite des einen, a, die von diesen Winkeln eigeschlossene Seite, c, zu finden.

$$c = \frac{a \sin(A + B)}{\sin A}.$$

6. Aus einer Seite, c, und den beyden ihr anliegenden Winkeln, A, B, eine der anderen Seiten, a, zu finden.

$$a = \frac{c \sin A}{\sin(A + B)}.$$

γ) Die dritte Hauptgleichung

$$c = b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin A^2)},$$

wobey das + Zeichen im zweyten Gliede gilt, wenn der Winkel B spitz, das — Zeichen, wenn er stumpf seyn soll, bringt folgende Aufgaben und Auflösungen.

7. Aus zwey Seiten, a und b, nebst dem Gegenwinkel der einen, A, die dritte Seite, c, zu finden.

$$c = b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin A^2)}.$$

Es bliebe die nemliche Aufgabe, wenn man a und c nebst A, als gegeben, b als gesucht betrachten wollte.

Die Lösung kann im Allgemeinen nicht anders als zweydeutig seyn.

8. Aus zwey Seiten, b, c, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, A, die dritte Seite, a, zu finden.

Wenn man das Glied b cos A transponirt, auf beyden Seiten alsdann zum Quadrat erhebt, ferner auf beyden Seiten $b^2 \sin A^2$ addirt, wo $b^2 \cos A^2 + b^2 \sin A^2, = b^2 (\cos A^2 + \sin A^2) = b^2$ ausmachen, so erhält man, zuletzt auf beyden Seiten die Quadratwurzel ziehend:

$$a = \sqrt{(c^2 - 2bc \cdot \cos A + b^2)}.$$

Hier gilt natürlich nur der positive Werth der Wurzel.

9. Aus den drey Seiten, a, b, c, einen Winkel, A, zu finden.

Die Formel des vorigen Falls gibt, quadrirt, nach einer einfachen Transposition und Division:

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}.$$

Jenachdem sich cos A positiv, 0, oder negativ ergibt, ist A ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer Winkel.

Drittes Capitel.

Grundlehren der analytischen Trigonometrie. Erstreckung ihrer Gültigkeit auf alle Winkel; und einige Anwendungen derselben auf die Auflösung der Dreyecke.

Unter analytischer Trigonometrie versteht man gewöhnlich einen Inbegriff von Regeln, vermöge deren aus der bekannten Beziehung, worin Winkel zu einander stehn, der Zusammenhang ihrer trigonometrischen Functionen abgeleitet werden kann. Es gibt deren unzählig viele, von welchen hier nur die einfacheren, in elementarischen Untersuchungen vorzüglich brauchbaren, entwickelt sind.

I. Allgemeine Formeln für zwey beliebige Winkel.

Die beyden ersten Formeln der analytischen Trigonometrie

1) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$,

2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,

sind schon früher (S. 361, 3.) für alle spitzen Winkel abgeleitet.

Daraus ergeben sich, wenn man in jenen Formeln $a + b = c$, und also $a = b - c$ setzt, aus den so entstehenden Gleichungen $\sin(c - b)$ und $\cos(c - b)$ sucht, und in den Endformeln für c zuletzt a schreibt:

3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,

4) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Man nennt mit Recht die voranstehenden Formeln die vier Hauptformeln der analytischen Trigonometrie. Aus ihnen lassen sich unzählig viele neue ableiten, theils allgemeine, sofern sie zwey ganz von einander unabhängige Winkel, a und b, betreffen; theils specielle, sofern der eine Winkel als Vielfaches oder aliquoter Theil des anderen gedacht wird.

A. Allgemeine Formeln.

Aus 1 und 3, so wie aus 2 und 4, folgen durch Addition und Subtraction:

5) $\frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2} = \sin a \cos b$,

6) $\frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{2} = \cos a \sin b$,

7) $\frac{\cos(a - b) + \cos(a + b)}{2} = \cos a \cos b$,

8) $\frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2} = \sin a \sin b$.

Am häufigsten erscheinen die nemlichen Formeln in umgekehrter Beziehung, wo man $a + b = A$, $a - b = B$, also $a = \frac{A + B}{2}$, $b = \frac{A - B}{2}$ in ihnen setzt, zuletzt wieder die Zeichen A und B, mit a und b verwechselnd:

9) $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a + b}{2}\right) . \cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$,

10) $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a + b}{2}\right) . \sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$,

11) $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$,

12) $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Man erhält aus diesen, für b setzend $90-\beta$, und zuletzt wieder statt β zurück b:

13) $\sin a + \cos b = 2\sin\left(\left(\frac{a-b}{2}\right) + 45^\circ\right)$
$\cdot \cos\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - 45^\circ\right)$,

14) $\sin a - \cos b = 2\cos\left(\left(\frac{a-b}{2}\right) + 45^\circ\right)$
$\cdot \sin\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - 45^\circ\right)$,

15) $\cos a + \sin b = 2\cos\left(\left(\frac{a-b}{2}\right) + 45^\circ\right)$
$\cdot \cos\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - 45^\circ\right)$,

16) $\cos a - \sin b = -2\sin\left(\left(\frac{a-b}{2}\right) + 45^\circ\right)$
$\cdot \sin\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - 45^\circ\right)$.

Aus diesen Formeln können dadurch, daß man sie durch Multiplication oder Division unter sich verbindet, viele andere abgeleitet werden, von denen hier nur wenige zur Probe folgen.

17) $\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right)}$,

18) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right)$,

19) $\frac{\cos a - \cos b}{\sin a + \sin b} = -\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Aus den vier ersten Hauptformeln hat man sogleich auch $\operatorname{tg}(a+b)$, weil es

$= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$ ist.

Wird im Zähler und Nenner mit $\cos a \cos b$ dividirt, und für $\frac{\sin a}{\cos a}$, $\operatorname{tg} a$; für $\frac{\sin b}{\cos b}$, $\operatorname{tg} b$ gesetzt, so kommt:

20) $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$.

Auf gleiche Art findet sich:

21) $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$,

22) $\cot(a+b) = \frac{\cot b \cot a - 1}{\cot b + \cot a}$, oder $\frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}$,

23) $\cot(a-b) = \frac{\cot b \cot a + 1}{\cot b - \cot a}$, oder $\frac{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$.

Man kann auch für Tangenten und Cotangenten aus den vier Hauptformeln solche bilden, wodurch sich die Summen und Differenzen dieser Functionen in Quotienten anderer umsetzen lassen. Namentlich geben Divisionen an denselben in nachstehender Art vollzogen, sofort:

24) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b}$,

25) $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b}$,

26) $\cot a + \cot b = \frac{\sin(a + b)}{\sin a \sin b}$,

27) $\cot a - \cot b = - \frac{\sin(a - b)}{\sin a \sin b}$,

28) $\operatorname{tg} a + \cot b = \frac{\cos(a - b)}{\cos a \sin b}$,

29) $\operatorname{tg} a - \cot b = - \frac{\cos(a + b)}{\cos a \sin b}$,

30) $\cot a + \operatorname{tg} b = \frac{\cos(a - b)}{\sin a \cos b}$,

31) $\cot a - \operatorname{tg} b = \frac{\cos(a + b)}{\sin a \cos b}$.

Daraus lassen sich durch Division wiederum sehr viele neue ableiten, wovon einige zur Probe genügen.

32) $\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a - b)}{\sin(a + b)} = \frac{\cot b - \cot a}{\cot b + \cot a}$,

33) $\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \cot b} = \operatorname{tg}(a - b) \operatorname{tg} b$,

34) $\frac{\cot a - \operatorname{tg} b}{\cot a + \operatorname{tg} b} = \frac{\cos(a + b)}{\cos(a - b)}$ u. s. w.

Solche Formeln zu entwickeln, ist nichts Weiteres, als mechanisches Zusammenschreiben, und gestattete Namenverwechslung nöthig; Jeder, dem diejenigen vorliegen, woraus sie auf diese Art entspringen, kann sie ohne Anleitung selbst ausbilden.

B. Speciellere Formeln.

α. Die bloße Annahme, daß b = a seyn soll, läßt aus den obigen allgemeinen Formeln eine Menge specieller entstehn, von denen hier nur einige der brauchbarsten ausgehoben werden mögen.

35) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, oder $a = \frac{1}{2} c$ gesetzt,
$\sin c = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$,

36) $\cos 2a = (\cos a)^2 - (\sin a)^2 = (1 - tg\, a)^2 \cos a^2$;
$\cos c = (\cos \frac{1}{2} c)^2 - (\sin \frac{1}{2} c)^2$,

37) $tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 - tg\, a)^2}$, $tg\, c = \frac{2\, tg\, \frac{1}{2} c}{1-(tg\, \frac{1}{2} c)^2}$,

38) $\cot 2a = \frac{(\cot a)^2 - 1}{2 \cot a}$, $\cot c = \frac{(\cot \frac{1}{2} c)^2 - 1}{2 \cot \frac{1}{2} c}$.

Man kann auch verlangen, daß die Beziehungen in diesen Formeln umgekehrt werden. Dies geschieht am leichtesten durch die Formel $\cos 2a = (\cos a)^2 - (\sin a)^2$ welche, jenachdem in ihr für $(\sin a)^2$ gesetzt wird: $1 - (\cos a)^2$, oder für $(\cos a)^2$, $1 - (\sin a)^2$, ergibt:

39) $\sin a = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2a}{2}\right)}$, oder
$\sin \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos c}{2}\right)}$;

40) $\cos a = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2a}{2}\right)}$, oder
$\cos \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos c}{2}\right)}$;

daraus folgt sofort:

41) $tg\, a = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}\right)}$, oder
$tg\, \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}\right)}$.

Man kann auch, den Bruch im Zähler und Nenner mit seinem eigenen Zähler oder Nenner multiplicirend,

42) $\text{tg}\, a = \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a} = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a}$, oder

$\text{tg}\, \frac{1}{2} c = \frac{1 - \cos c}{\sin c} = \frac{\sin c}{1 + \cos c}$ erhalten.

Auf gleiche Art findet sich:

43) $\cot \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}\right)}$, oder

$\cot \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos c}{1 - \sin c}\right)}$.

Wollte man die Functionen von ½ c durch sin c ausgedrückt haben, so würde

44) $\sin \frac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos c}{2}\right)} =$

$\sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{(1 - (\sin c)^2)}}{2}\right)} =$

$\frac{\sqrt{(1 - \sin c)} - \sqrt{(1 + \sin c)}}{2}$ *).

45) $\cos \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{(1 - \sin c)} + \sqrt{(1 + \sin c)}}{2}$,

woraus tg ½ c und cot ½ c in ähnlicher Form erhalten werden können. Es lassen sich die nemlichen Functionen von ½ c auch durch tg c oder cot c darstellen.

Man kann aus den beyden ersten Hauptformeln allmälig Sinus und Cosinus von 2a, 3a, 4a . . na

*) Man überzeugt sich leicht durch würkliches Quadriren, daß $\sqrt{\left(\frac{1 \pm \sqrt{(1 - x^2)}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{(1 - x)} \pm \sqrt{(1 + x)}}{2}$ ist.

ableiten, wenn man nach und nach in ihnen für b setzt a, 2a, 3a . . (n — 1) a. Indessen bleiben diese Anwendungen besser einer späteren Betrachtung, welche die Theorie der Potenziirung zweytheiliger Größen voraussetzen darf, vorbehalten.

β. Nicht minder speciell ist die Voraussetzung, daß $a = 45°$ seyn soll, wodurch, da alsdann $\sin a = \cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $\operatorname{tg} a = \cot a = 1$, unter vielen anderen, Formeln, wie die nachstehenden, entspringen.

46) $\sin(45° \pm b) = \frac{\cos b \pm \sin b}{\sqrt{2}}$,

47) $\cos(45° \pm b) = \frac{\cos b \mp \sin b}{\sqrt{2}}$,

48) $\operatorname{tg}(45° \pm b) = \frac{1 \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} b}$,

49) $\cot(45° \pm b) = \frac{\cot b \mp 1}{\cot b \pm 1}$.

II. Erstreckung der Begriffe von den trigonometrischen Functionen und der Formeln der analytischen Trigonometrie auf alle möglichen Winkel.

Die Theorie des Dreyecks führt nicht über die Vorstellungen von hohlen Winkeln hinaus, allerdings aber gibt die von den vielseitigeren Vielecken zu der Betrachtung größerer Winkel Veranlassung, und dadurch das Bedürfniß, die Begriffe der trigonometrischen Functionen auf alle Winkel ohne Ausnahme erstrecken, und die Formeln, welche den gegenseitigen Zusammen-

hang derselben betreffen, in gleicher Allgemeinheit als gültig gebrauchen zu können. Der Beweis, daß dieses gestattet sey, beruht auf den nachstehenden Sätzen.

1. Die Anschauung zeigt, daß, wenn die Winkel (fig. 9.) ACB, ECF, GCF, DCB sich gleich, und die Hypotenusen CA, CE, CG, CD identisch angenommen sind, auch AB = EF und FG = BD = AB, so wie CF = CB, werden müssen, was die Größe betrifft; wobey indessen, wenn AB und also auch EF positiv genommen werden, FG und BD negativ, und ebenso, wenn CB positiv ist, CF als negativ anzusehn sind. Man hat also, den Winkel $ACB = \varphi$ gesetzt, $ECB = 180^\circ - \varphi$, $GCB = 180^\circ + \varphi$ und $DCB = 360^\circ - \varphi$, die beyden letzten Winkel als überstumpfe verstanden, und erhält aus der Figur als Factum, daß $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$ und $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$; daß $\sin(180^\circ + \varphi) = -\sin\varphi$ und $\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos\varphi$; daß endlich $\sin(360^\circ - \varphi) = -\sin\varphi$ und $\cos(360^\circ - \varphi) = \cos\varphi$ sey.

Aus diesen Sätzen, verbunden mit dem bekannten, daß $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi$ und $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, ergibt sich theils von selbst, theils dadurch, daß man in zwey von ihnen statt φ setzt $90^\circ - \varphi$, daß:

für den Winkel	der Sinus	der Cosinus
$90^\circ \pm \varphi$	$-\cos\varphi$	$\mp \sin\varphi$
2. $90^\circ \pm \varphi$	$\mp \sin\varphi$	$-\cos\varphi$
3. $90^\circ \pm \varphi$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
4. $90^\circ \pm \varphi$	$\pm \sin\varphi$	$+\cos\varphi$ ist.

Da man jedem Winkel, unter r eine beliebige ganze Zahl verstanden, $4r \cdot 90^\circ$ zusetzen kann, ohne daß dieses

auf seine trigonometrischen Functionen Einfluß hat; so darf man statt der vier Ausdrücke, die in der ersten Columne stehn, ohne Aenderung der übrigen $(4r + 1) . 90° \pm \varphi$, $(4r + 2) . 90° \pm \varphi$, $(4r + 3) . 90° \pm \varphi$, $(4r + 4) . 90° \pm \varphi$ setzen. Auch wenn $\varphi = 0$, also $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ ist, gelten diese Beziehungen.

2. Die Hauptmomente des Beweises für die Allgemeinheit der Formeln, auf welchen die analytische Trigonometrie ruht, wobey die leichteren der Kürze wegen nur angezeigt worden sind, kommen auf Folgendes zurück.

Die Substitution zeigt unmittelbar, daß die Formeln für $\sin(a \pm b)$ und $\cos(a \pm b)$ gültig sind, wenn, n als ganze positive Zahl, φ als spitzen Winkel gedacht, $a = n . 90°$, $b = \varphi$ angenommen wird. Ferner ergibt sich sogleich, daß jene Formeln gelten, wenn, m als eine ganze positive Zahl, geringer als n, gedacht, $a = n . 90°$, $b = m . 90°$ gesetzt wird. Daraus folgert sich leicht, daß die Formeln für $\sin(a - b)$ und $\cos(a - b)$ auch dann gelten, wenn $a = n . 90°$; b kleiner als a, allgemein also von der Form $m . 90° + \varphi$, ist, $a - b$ daher die Form $(n - m) 90° - \varphi$ erhält. Dies vorausgesetzt mögen, unter φ und ψ, wie bisher, spitze Winkel verstanden, a und b beliebige positive Winkel, also $a = n . 90° - \varphi$, $b = m . 90° - \psi$ seyn, woraus $\varphi = n . 90° - a$ und $\psi = m . 90° - b$ folgt. Für solche spitze Winkel gilt die Formel $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi$. Es ist also $\sin((n + m) . 90° - (a + b)) = \sin(n . 90° - a) \cos(m . 90° - b) + \cos(n . 90° - a) \sin(m . 90° - b)$. Für

die Factoren dieser beyden Producte gelten die der vier Hauptformeln gleichfalls. Multiplicirt man die genannten Factoren, nachdem sie nach den Hauptformeln, die für Winkel von der Form n . 90° — a feststehen, entwickelt worden sind, und ordnet man die Producte nach den Factoren sin a, cos a, sin b, cos b, so erhält man:

(sin n . 90° cos m . 90° + cos m . 90° sin n . 90°) (cos a cos b — sin a sin b) — (cos n . 90° cos m . 90° — sin n . 90° sin m . 90°) (sin a cos b + cos a sin b) = sin((n + m) . 90° — (a + b)).

Nun gibt die Formel diesseits des Gleichheitszeichens, zusammengezogen so weit es nach dem Obigen bereits gestattet ist:

sin((m + n) . 90°) . (cos a cos b — sin a sin b) — cos((m + n) . 90°) . (sin a cos b + cos a sin b).

Die Form jenseits des Gleichheitszeichens, entwickelt, wie es für eine solche, da (n + m) . 90° der Annahme zufolge, größer als a + b seyn soll, zulässig ist, gibt sin(m + n) . 90°) cos(a + b) — cos((m + n) . 90°) sin(a + b). Daraus ergibt sich offenbar, daß die beyden ersten Grundformeln für jedes positive a und b gültig sind.

3. Wenn der Winkel (fig. 9.) am Scheitelpuncte, C, dessen erster Schenkel, CB, sich aufwärts dreht, wie für den Winkel BCA geschehn, positiv ist, so muß ein anderer, durch Drehung nach der entgegengesetzten Seite hin beschriebener, wie DCB, als negativ angesehn werden. Die Figur zeigt für alle Winkel zwischen 0 und 360°, daß ein negativer und ein gleich großer positiver Winkel sowohl der Größe als dem Zeichen

nach gleiche Cosinus haben, hingegen das Zeichen, welches der Sinus des positiven Winkels führt, umgekehrt werden muß, wenn der Sinus eines gleich großen negativen Winkels erhalten werden soll. Dies vorausgesetzt gelten die beyden ersten Grundformeln, und also gleichfalls alle übrigen, die aus ihnen abgeleitet sind, auch für alle negativen Winkel. Denn wenn $\sin(-\varphi) = \sin\varphi$ und $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, so gibt $\sin(-a) \cdot \cos(-b) + \cos(-a) \cdot \sin(-b) = -(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$, d. h. so viel als $-\sin(a+b)$ und $\cos(-a) \cdot \cos(-b) - \sin(-a) \cdot \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.

4. Die Hauptformeln gelten endlich, wenn der eine der beyden Winkel, die in ihnen vorkommen, positiv, der andere negativ ist. Heiße der größere a, der kleinere b. Ist der kleinere negativ, $b = -c$, so wird $a + b = a - c$ positiv. Es gilt also für dieses $a - c$, daß $\cos(a-c) = \cos a \cos c + \sin a \sin c$, und daß $\sin(a-c) = \sin a \cos c - \cos a \sin c$. Da nun $b = -c$ und also $\cos c = \cos b$, $\sin c = -\sin b$, so erhält man, dies substituirt, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ und $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. Ist hingegen der größere, a, negativ, $a = -c$, der kleinere, b, positiv, so ist $a + b = -c + b = -(c-b)$, also $\sin(a+b) = -\sin(c-b) = -\sin c \cos b + \cos c \sin b$ und $\cos(a+b) = \cos c \cos b + \sin c \sin b$. Setzt man in diesen Formeln für $\sin c = -\sin a$, für $\cos c = \cos a$, so werden es die anfänglichen Hauptformeln für $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ wieder, die sich also auch in diesem Falle als gültig zeigen.

III. Abkürzungen in der Auflösung der Dreyecke, zum Theil durch Anwendungen der analytischen Trigonometrie.

Es gibt unter den Aufgaben, worin verlangt wird, aus drey ursprünglichen Stücken eines Dreyecksumfangs eins der übrigen zu finden, vier, bey denen eine Erleichterung der Rechnung, falls sie durch Logarithmen geführt werden soll, sofern das Aufschlagen der Tafeln als der mühsamste Theil dieses Geschäfts betrachtet wird, in der That möglich ist.

a. Die Formel für die dritte Aufgabe (S. 378, 3.) $\cot A = \frac{c - a \cos B}{a \sin B}$, erfordert ein fünfmaliges Aufschlagen der Tafeln, wenn a, c, B gegeben sind, um A zu finden. Man kann aber A und C aus diesen Datis, durch viermaliges, auf folgende Art erhalten.

Da $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$, so hat man, auf beyden Seiten 1 addirt, später auf beyden Seiten 1 abgezogen, das letzte Resultat durch das erste dividirt:

$$\frac{\sin A - \sin C}{\sin A + \sin C} = \frac{a - c}{a + c}.$$

Da ferner (S. 383, 17.) $\frac{\sin A - \sin C}{\sin A + \sin C} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + C)}$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + C) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(180^\circ - B) = \cot \frac{1}{2} B$, hat man $\left(\frac{a - c}{a + c}\right) \cot \frac{1}{2} B = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - C)$. Daraus findet sich $\frac{1}{2}(A - C)$; aus ihm und $\frac{1}{2}(A + C) = 90^\circ - \frac{1}{2} B$ ergibt sich durch Addition A, durch Subtraction C.

Wären sogleich die Logarithmen von a und c gegeben, so würde man statt $\frac{a-c}{a+c} = \frac{1-\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}}$ oder

$\frac{c}{a} = tg\,\varphi$ setzend (S. 388, 48.), $\frac{1-tg\,\varphi}{1+tg\,\varphi} = tg(45^\circ - \varphi)$, und also $tg(45^\circ - \varphi) \cdot cot\,\frac{1}{2}B = tg\,\frac{1}{2}(A-C)$ erhalten, wobey gleichfalls nur ein viermaliges Aufschlagen der Tafeln für die Berechnung nothwendig ist.

b. Die Formel für die siebente Aufgabe (S. 379, 7.)

$$c = b\cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin A^2)},$$

erfordert, wenn a und b selbst gegeben sind, ein achtmaliges Aufschlagen der Tafeln; wenn die Logarithmen von a und b schon bekannt sind, ein sechsmaliges. Bey ihr gibt es Hülfe, wenn man, indirect, aus $\frac{b \sin A}{a} = \sin B$, und dann aus $\frac{b\,.\,\sin(A+B)}{\sin B} = \frac{b \sin C}{\sin B} = c$ berechnet, wo, wenn a und b selbst gegeben sind, ein sechsmaliges, wenn ihre Logarithmen, ein viermaliges Aufschlagen der Tafeln hinreicht.

c. Die Formel für die achte Aufgabe (S. 380, 8.)

$$a = \sqrt{(c^2 + b^2 - 2cb\cos A)}$$

verlangt, wenn b und c selbst gegeben sind, ein achtmaliges Aufschlagen der Tafeln ($\log 2 = 0{,}3010300$ als bekannt vorausgesetzt); wenn man log b und log c hat, ein sechsmaliges. Nimmt man, indirect,

$\frac{c - b \cos A}{b \sin A} = \cot B$, und hernach $\frac{b \sin A}{\sin B} = a$,
so hat man im Ganzen die Tafeln nur fünfmal aufzuschlagen; sind log b und log c gegeben, und ist
$\frac{c - b \cos A}{b \sin A} = \frac{1 - \frac{b}{c} \cos A}{\frac{b}{c} \sin A}$ gesetzt, und hernach
$\frac{b \sin A}{\sin B} = a$, so wird schon ein viermaliges Aufschlagen der Tafeln genügen.

d. Die Formel für die neunte Aufgabe (S. 380, 9.)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

erfordert ein achtmaliges Aufschlagen der Tafeln, wenn a, b, c selbst, ein fünfmaliges, wenn ihre Logarithmen gegeben sind.

Berechnet man aus dem gegebenen cos A, der Formel (S. 386, 40.) $\sqrt{\left(\frac{1 + \cos A}{2}\right)} = \cos \frac{1}{2} A$ gemäß, $1 + \cos A = 1 + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{(c + b)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(c + b + a)(c + b - a)}{2bc}$, so erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{(c + b + a)(c + b - a)}{2bc}\right)},$$

welche Formel ein fünfmaliges Aufschlagen der Tafeln nöthig macht.

Man hätte auf gleiche Art

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos A}{2}\right)} = \sqrt{\frac{(c + a - b)(b + a - c)}{2bc}}$$

und aus beyden, da $2 \cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \sin \tfrac{1}{2} A = \sin A$, für dieses den Werth:

$$\sqrt{\left(\frac{(c + b + a)(c + b - a)(c + a - b)(b + a - c)}{2bc}\right)}$$

$= \sin A$ erhalten können.

Hat man endlich, um $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \cos A$ zu berechnen, $\log a$, $\log b$, $\log c$, so läßt sich dadurch eine Abkürzung erreichen, daß man $c^2 + b^2 - a^2 = c^2 . (1 + \frac{b^2}{c^2}) - a^2$, und darin $\frac{b}{c} = \operatorname{tg} \varphi$ setzt, wodurch es (da $1 + \operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{1}{\cos \varphi^2}$ ist) $\frac{c^2}{\cos \varphi^2} - a^2 = \frac{c^2}{\cos \varphi^2} (1 - \frac{a^2 \cos \varphi^2}{c^2})$ wird. Setzt man ferner $\frac{a \cos \varphi}{c} = \operatorname{tg} \psi$, so hat man $(1 - \frac{a^2 \cos \varphi^2}{c^2}) = 1 - \operatorname{tg} \psi^2 =$ (S. 387, 42.) $\frac{\cos 2\psi}{\cos \psi^2}$, und also, zusammengefaßt, die Regel: man setze $\frac{b}{c} = \operatorname{tg} \varphi$; $\frac{a \cos \varphi}{b} = \operatorname{tg} \psi$ und es ist: $\cos A = \frac{c \cos 2\psi}{2b \cos \psi^2 . \cos \varphi^2}$. Dabey reicht viermaliges Aufschlagen der Tafeln hin.

2. Es gibt Fälle, wo man aus drey bekannten bestimmenden Stücken eines Dreyecksumfanges, jedes der *übrigen* finden soll. Dabey verdient also berücksichtigt

zu werden, in wiefern auf die vortheilhafteste Art, die bey der Berechnung des einen gebrauchten Werthe auch bey der für die übrigen behülflich werden können. Das Wichtigste dieser Art ist Folgendes.

a. Aus einer Seite, c, und den ihr anliegenden Winkeln, A, B, die beyden anderen Seiten zu finden.

Man hat $b = \frac{c \sin B}{\sin(A+B)}$; $a = \frac{c \sin A}{\sin(A+B)}$, der Factor $\frac{c}{\sin(A+B)}$ ist beyden Ausdrücken gemein; ein sechsmaliges Aufschlagen der Tafeln reicht also hin, b und c zu finden. Nimmt man aber den Satz, daß $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A}$ und bildet daraus (S. 382, 9, 10.) die Formeln:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{2 \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) . \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin A},$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{2 \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) . \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin A};$$

setzt man darin für $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{180^\circ - A}{2}\right)$ $= \sin \frac{1}{2} A$, und für $\sin A$ (S. 386, 35.) $= 2 \cos \frac{1}{2} A . \sin \frac{1}{2} A$, so erhält man:

$$b - c = \frac{a \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2} A}, \text{ und}$$

$$b + c = \frac{a \cos\left(\frac{B - C}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2} A},$$

welche Formeln, im Zusammenhange berechnet, nur ein fünfmaliges, oder falls log a bekannt ist, ein viermaliges Aufschlagen der Tafeln erfordern. Aus $b - c$ und $b + c$ ergeben sich b und c sogleich.

b. Man soll aus zwey Seiten, b, c, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, A, nicht allein die übrigen Winkel, sondern auch die dritte Seite, a, finden.

Hier ist durch die voranstehende Betrachtung (S. 383, a.) der kürzeste Weg schon vorgezeichnet. Hat man b, c selbst, so gibt die Formel $\frac{c - b \cos A}{b \sin A} = \cot B$; hat man log b und log c,

$$\frac{1 - \frac{b}{c} . \cos A}{\frac{b}{c} \sin A} = \cot B;$$

und man erhält hernach, in beyden Fällen, $\frac{b \sin A}{\sin B} = a$. Es reicht also, um B zugleich mit a zu berechnen, im ersten Falle ein fünfmaliges, im zweyten ein viermaliges Aufschlagen der Tafeln hin.

Es lassen sich solcher Umformungen mehrere bewerkstelligen.

Viertes Capitel.

Auflösung der Dreyecke durch Grenzbestimmungen.

I. Allgemeine Idee der Untersuchung und Beschränkung derselben.

1. Es ist durch die elementarische Theorie der trigonometrischen Auflösung des Dreyecks Alles erforderliche vorhanden, um aus genau gegebenen, hinlänglich bestimmenden Stücken eines Dreyecksumfangs jedes der übrigen näherungsweise bis zu irgend einer beliebig gewählten Kleinheitsgrenze richtig berechnen zu können.

Aber bey jeder Anwendung auf empirische Constructionen sind jene bestimmenden Stücke nicht genau gegeben, sondern schwankende Größen, von denen zwar mit Sicherheit, daß sie zwischen bestimmten angeblichen Grenzen enthalten seyn müssen, aber nicht, welchen von den unzählig vielen innerhalb dieser Grenzen möglichen Werthen sie besitzen, ausgemittelt werden kann. Sind aber ursprüngliche bestimmende Größen als schwankende gegeben, so müssen unfehlbar die von ihhen abhängigen, sofern diese aus jenen abgeleitet werden, gleichfalls als solche erscheinen.

Es gibt also keinen gründlichen practischen Gebrauch der Trigonometrie ohne Lösung der Aufgabe: aus den beliebig gewählten Aenderungen, welche den ursprünglichen bestimmenden Stücken eines Dreyecksumfanges beygelegt werden mögen, die dadurch herbeygeführte Aenderung für jedes, von jenen ursprünglichen

abhängige, Stück des nemlichen Umfangs abzuleiten, schon aus dem Grunde, weil nur durch die Erledigung dieses allgemeinen Problems es möglich wird, auch die Aufgabe: aus den Grenzwerthen, zwischen denen die als ursprüngliche angenommenen Stücke des Dreyecksumfangs liegen sollen, Grenzwerthe für jedes der durch sie bestimmten abhängigen abzuleiten, befriedigend zu lösen.

Aenderung einer Größe soll im Folgenden durch das Zeichen Δ, dem Zeichen der Größe selbst vorangestellt, angedeutet werden.

Daß allemal bey der Bestimmung von Aenderungen eine feste Kleinheitsgrenze stattfinde, unter welche hinab die, solche Aenderungen ausdrückenden, Zahlen nicht getrieben werden sollen, bedarf kaum einer Erwähnung.

2. Eine allgemeine und strenge Auflösung der eben genannten Aufgaben führt zu verwickelten und schwierigen Betrachtungen. Will man aber zwey beschränkende Voraussetzungen eintreten lassen, welches gerade diejenigen sind, die in der That bey den wichtigsten Anwendungen der Trigonometrie in der Regel von selbst statthaben, so wird eine genügende Erledigung jener Aufgaben, ohne daß dabey über die Elemente hinauszugehn ein Bedürfniß entsteht, möglich gemacht.

3. Die erste dieser Voraussetzungen ist, daß die Aenderungen, welche mit den als schwankend gegebenen Winkeln vorzunehmen seyn würden, um sie größer oder kleiner zu machen, als sie in Wahrheit sind, eine so geringe Größe besitzen, daß, wenn der Winkel φ, jene

Grenzänderung desselben $\Delta\varphi$ ist, alsdann $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi\ \widehat{\Delta\varphi}$, und $\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \cos\varphi - \sin\varphi\ .\ \widehat{\Delta\varphi}$ gesetzt werden könne, ohne der Näherung Eintrag zu thun, welche bey der Berechnung erreicht werden soll. Die gleiche Voraussetzung wird alsdann auch für jede andere Aenderung, die einem solchen Winkel beygelegt werden mögte, gelten, sofern sie geringer seyn soll als seine Grenzänderung (S. 364, 6.).

Schon diese eine Voraussetzung reicht hin, aus jeder Gleichung zwischen vier Stücken eines Dreyecksumfanges eine neue abzuleiten, welche den Zusammenhang zwischen den gleichzeitigen Aenderungen dieser Stücke ausdrückt.

Setzt man in die erste Hauptgleichung der Trigonometrie $a \sin B = b \sin A$, statt a, B, b, A, an die Stelle: $a + \Delta a$, $B + \Delta B$, $b + \Delta b$, $A + \Delta A$ und $\sin(A + \Delta A) = \sin A + \cos A\ .\ \widehat{\Delta A}$; $\sin(B + \Delta B) = \sin B + \cos B\ .\ \widehat{\Delta B}$, so ergibt sich, die neue entwickelt, die anfängliche von der neuen abgezogen, und den Rest in gleicher Ordnung durch dieselbe dividirt:

$$\frac{\Delta a}{a} + \widehat{\Delta B}\ .\ \cot B + \frac{\Delta a}{a}\ .\ \widehat{\Delta B}\ .\ \cot B =$$

$$\frac{\Delta b}{b} + \widehat{\Delta A}\ .\ \cot A + \frac{\Delta b}{b}\ .\ \widehat{\Delta A}\ .\ \cot A.$$

Die zweyte Hauptgleichung:

$c \sin A = a \sin(A + B)$, ergibt auf gleiche Art:

$(c + \Delta c)(\sin A + \widehat{\Delta A}\ .\ \cos A) = (a + \Delta a) \sin(A + B) + (\widehat{\Delta A} + \widehat{\Delta B})\ .\ \cos(A + B)$; welches, gehörig entwickelt, die Gleichung:

$$\frac{\Delta c}{c} + \widehat{\Delta A}\ .\ (\cot A - \cot(A + B)) + \frac{\Delta c}{c}\ .\ \widehat{\Delta A}\ .\ \cot A =$$

$$\frac{\Delta a}{a} + \widehat{\Delta B}\,.\,\cot(A+B) + \frac{\Delta a}{a}\,.\,(\widehat{\Delta A}+\widehat{\Delta B})\,.\,\cot(A+B)$$

darbietet.

Die dritte Hauptgleichung:

$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a^2$ gibt $(b+\Delta b)^2 + (c+\Delta c)^2 - 2(b+\Delta b)(c+\Delta c)(\cos A - \widehat{\Delta A}\,.\,\sin A) = (a+\Delta a)^2$, welche, durch Multiplication entwickelt, nach Abziehung der anfänglichen, und dann für Δa, Δb, Δc gesetzt: $a\,.\,\frac{\Delta a}{a}$, $b\,.\,\frac{\Delta b}{b}$, $c\,.\,\frac{\Delta c}{c}$, ergibt:

$$\frac{\Delta b}{b}\,.\,b(b - c\cos A) + \frac{\Delta c}{c}\,.\,c(c - b\cos A) + \widehat{\Delta A}\,.\,bc\sin A + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2.\,\frac{b^2}{2} + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2.\,\frac{c^2}{2} - \frac{\Delta b}{b}\,.\,\frac{\Delta c}{c}\,.\,bc\cos A + \frac{\Delta b}{b}\,.\,\widehat{\Delta A}\,.\,bc\sin A + \frac{\Delta c}{c}\,.\,\widehat{\Delta A}\,.\,bc\sin A + \frac{\Delta b}{b}\,.\,\frac{\Delta c}{c}\,.\,\widehat{\Delta A}\,.\,bc\sin A = \frac{\Delta a}{a}\,.\,a^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2.\,\frac{a^2}{2}.$$

Offenbar machen es diese drey neuen Gleichungen möglich, jede der Aenderungen, von welchen sie den gegenseitigen Zusammenhang ausdrücken, aus den übrigen zu berechnen, da sie in Beziehung auf jene Aenderungen als unbekannte Größen, sofern dieselben Winkeln angehören, nur vom ersten, sofern sie Seiten betreffen, in der Regel eben so beschaffen, und blos in zwey Fällen vom zweyten Grade, mithin alle direct lösbar sind.

4. Die Ausführung dieser Untersuchung erleichtert sich noch anderweitig bedeutend, wenn man eine zweyte beschränkende Voraussetzung hinzutreten zu lassen berechtigt ist, welche, wie die erste, bey den Lösungen derjenigen das Dreyeck betreffenden Aufgaben, die auf empirischen Datis ruhen, in der Regel immer gemacht werden darf. Es mögen diejenigen Glieder in den vorliegenden Gleichungen, in denen kein Factor vorkommt, welcher eine Aenderung (es sey die einer Seite oder die eines Winkels) darstellt, Größen der 0ten Dimension; diejenigen, die nur einen solchen Factor enthalten, Größen der ersten Dimension u. s. w.; allgemein diejenigen, welche ein Product aus mehreren solchen enthalten, Größen von höheren Dimensionen genannt werden. Sind nun die vorliegenden Größen so beschaffen, daß in den aus ihnen gebildeten Gleichungen die Glieder der höheren Dimensionen gegen die der ersten weggelassen werden dürfen, weil dieses Weglassen den Werth des jedesmal Gesuchten erst jenseits der Kleinheitsgrenze, die für dasselbe stattfinden soll, affizirt, so können die Gleichungen für den Zusammenhang der Aenderungen in Gleichungen des ersten Grades der einfachsten Art zusammengezogen werden.

5. Die Bedingungen, unter denen aus den vorliegenden Gleichungen alle Glieder von höheren Dimensionen als die erste weggelassen werden dürfen, ergeben sich aus folgender Betrachtung.

Alle drey Gleichungen kommen, unter z das Gesuchte, als eine Größe der ersten Dimension, unter Q, R gegebene Größen der Dimension 0; unter p und q gegebene der ersten; unter π und χ gegebene, die noch

über die erste hinausgehn, verstanden, auf eine von den beyden nachstehenden Formen zurück.

Entweder sie haben die Gestalt $(Q + q) z = p + \pi$. Alsdann wird $z = \frac{p + \pi}{Q + q}$. Sobald der Unterschied zwischen dieser Größe und $\frac{p}{Q}$ weniger als die Kleinheitsgrenze für z beträgt, hätte man diesen Werth des z aus der anfänglichen Gleichung, die Glieder höherer Dimensionen aus ihr weglassend, erhalten können.

Oder es findet die Gestalt $R z^2 + (Q + q + \chi) z = p + \pi$ statt. Heißt, für den Moment, $Q + q + \chi = S$, $p + \pi = T$, so hat man $R z^2 + S z = T$. Die Lösung dieser Gleichung gibt:

$$z = \sqrt{\left(\frac{S^2}{4R^2} + \frac{T}{R}\right)} - \frac{S}{2R} \text{ *)} =$$

$$\frac{S}{2R} \sqrt{\left(1 + \frac{4RT}{S^2}\right)} - \frac{S}{2R}.$$

Nun liegt $\sqrt{\left(1 + \frac{4RT}{S^2}\right)}$ zwischen $1 + \frac{2RT}{S^2}$ und $1 + \frac{2RT}{S^2} - 2\left(\frac{RT}{S^2}\right)^2$, sobald $\frac{4RT}{S^2}$ ein echter Bruch ist **). Wenn also $\frac{S}{2R} \cdot 2\left(\frac{RT}{S^2}\right)^2 = \frac{R}{S}\left(\frac{T}{S}\right)^2$

*) Hier kann nur der positive Werth der Radicalgröße gelten, weil für $T = 0$ auch $z = 0$ seyn soll.

**) Heiße $\frac{4RT}{S^2} = x$. Da $(1 + \frac{1}{2} x)^2 = 1 + x + \frac{1}{4} x^2$; hingegen $(1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2)^2 = 1 + x - \frac{1}{8} x^2 (1 - \frac{1}{8} x)$, also, wenn x ein echter Bruch ist, das Erste stets größer,

unter die Kleinheitsgrenze fällt, so hat man $z = \frac{S}{2R} \cdot \left(1 + \frac{2RT}{S^2}\right) - \frac{S}{2R} = \frac{T}{S}$. Wenn also ferner statt $\frac{T}{S} = \frac{p + \pi}{Q + q + \chi}$, ohne Verletzung der Kleinheitsgrenze $\frac{p}{Q}$ gesetzt werden darf, so erhält man für z dasselbe, was die Weglassung aller Glieder von höheren Dimensionen in der anfänglichen Gleichung ergibt. Im gegenwärtigen Falle sind also die Bedingungen, auf die ursprünglich gegebenen zurückgeführt: daß $\frac{p + \pi}{Q + q + \chi} - \frac{p}{Q}$, und $\frac{R(p + \pi)^2}{(Q + q + \chi)^3}$, beyde weniger betragen, als die für die Bestimmung des z festgestellte Kleinheitsgrenze.

6. Angenommen nun, die leicht anzustellende Untersuchung habe gezeigt, daß in der That, unter den für die Aenderungen der Stücke eines Dreyecksumfangs statthabenden Bestimmungen, die Gleichungen zwischen ihnen auf Gleichungen des ersten Grades, deren Glieder die erste Dimension nicht überschreiten, zurückgebracht werden können, ist es sofort auch gestattet, jene Gleichungen zwischen den Aenderungen überhaupt zu dem Zwecke zu benutzen, daß man aus den Grenzänderungen der ursprünglichen Stücke, eine positive und eine negative Grenzänderung

das Zweyte stets kleiner als $1 + x$ ist, so liegt $\sqrt{(1 + x)}$ zwischen $1 + \frac{1}{2}x$ und $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

des jedesmal durch sie zu bestimmenden abhängigen erhalte. Wenn allgemein unter Δu, Δv, Δw ursprüngliche Aenderungen, unter A, B, C Größen, die von ihnen unabhängig, und als bekannt gegeben sind, verstanden, $z = A\Delta u + B\Delta v + C\Delta w$, und man Δu, Δv, Δw zu groß nimmt, so werden auch einzeln $A\Delta u$, $B\Delta v$, $C\Delta w$ zu groß; und wenn man die Zeichen von Δu, Δv, Δw so einrichtet, daß jene Glieder alle positiv werden, so erhält man eine positive Summe, zu groß für z, mithin einen positiven Grenzwerth für dasselbe z, berechnet aus den Grenzänderungen, in welchen Δu, Δv, Δw auslaufen, für deren jede ein positiver und ein negativer Werth gegeben ist. Der negative Grenzwerth für z ergibt sich aus derselben Regel, nur in ihrem Ausdrucke die Worte positiv und negativ verwechselt. Beyde sind blos dem Zeichen nach verschieden, wenn das Gleiche für die ursprünglichen Δu, Δv, Δw stattfindet. Es genügt also alsdann, blos den positiven zu berechnen.

Sobald hingegen die abhängigen Aenderungen vermöge der ursprünglichen durch Ausdrücke gegeben werden, in denen nicht alle Einfluß habenden Glieder blos von der ersten Dimension sind, ist es viel schwieriger, Grenzwerthe für sie aus denen der ursprünglichen abzuleiten, und wird aus diesem Grunde mit Recht die vorhin genannte einfachere Voraussetzung zum Gegenstande einer für sich bestehenden Betrachtung gemacht, wie sie, auf die Grundzüge beschränkt, in den nachfolgenden Sätzen enthalten ist.

II. Genäherte Auflösung der Dreyecke unter einigen Beschränkungen.

Unter der Voraussetzung, daß in der That die durch die Seiten dividirten Grenzänderungen der Seiten sowohl, als die der Winkel, so klein sind, daß die in den vorhergehenden Sätzen näher bezeichneten Bedingungen, und zwar nicht allein der ersten Art, welche darauf ankommen, daß, wenn A einen gegebenen Winkel bedeutet, $\widehat{\Delta A}^2$ von $\widehat{\Delta A}$ um weniger als die festgestellte Kleinheitsgrenze abweiche, sondern auch die der zweyten Art, welche für jede einzelne Aufgabe eine besondere Betrachtung erfordern, als erfüllt angesehn werden können, läßt sich jeder trigonometrischen Formel, wonach aus drey ursprünglichen Stücken eines Dreyecksumfangs ein viertes berechnet wird, eine zweyte beygesellen, wodurch, aus den beliebigen Aenderungen jener ursprünglichen, die dadurch bestimmte Aenderung des vierten im Allgemeinen, und alsdann auch aus den Grenzänderungen der erstgenannten, Grenzänderungen für das letzte gefunden werden können. Es muß hier genügen, nur die Formeln selbst, und die Bedingungen ihrer Gültigkeit, gehörig abgeleitet, aufzustellen; der bequemste Mechanismus ihres Gebrauchs, welcher allerdings fernere Entwickelung verdient, so wie eine Reihe anderweitiger, höchst interessanter, Untersuchungen über die kleinsten Werthe, welche die Grenzänderungen erhalten können, wenn man die ursprünglichen Stücke des Dreyecksumfangs nach Willkühr anzunehmen sich vorbehalten darf, würden Betrachtungen nach sich ziehn, die über die Grenzen eines Grundrisses hinausgehn müßten, obschon sie sich elementarisch vollenden ließen.

Aufgaben, die das rechtwinklichte oder gleichschenklichte Dreyeck betreffen, müssen unter die allgemeinen Formeln als besondere Fälle substituirt werden *).

A. Aus der ersten Hauptgleichung der Trigonometrie: $a \sin B = b \sin A$, lösen sich zwey Aufgaben:

1. Aus zwey Winkeln, A, B, und der Gegenseite des einen, b, die des anderen, a, zu finden:

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

Zu dieser Formel gehört:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} + \widehat{\Delta A} \,.\, \cot A - \widehat{\Delta B} \,.\, \cot B.$$

Gültig, wenn der aus ihr gefundene Werth von $\frac{\Delta a}{a}$,

*) Man kann allerdings annehmen, daß in einem Dreyeck der eine Winkel ein für allemal ein rechter seyn soll, und dann läßt sich eine besondere Theorie für den Zusammenhang zwischen den Aenderungen von zwey anderen ursprünglichen Stücken seines Umfangs, und der Aenderung des dritten, jedesmal durch sie bestimmten, durch Ausarbeitung eigener Formeln für das rechtwinklichte Dreyeck, entwerfen. Aber practisch sind solche Betrachtungen leer, und können leicht durch ungebührlichen Gebrauch zu widersinnigen Resultaten führen. Ist der rechte Winkel in einem Dreyecke durch Messung als ein solcher erkannt, so kann er nicht umhin, wie die übrigen Stücke des Umfangs, eine schwankende Größe zu seyn; sobald aber dieses der Fall ist, finden die Formeln für das rechtwinklichte Dreyeck, weil in ihnen der rechte Winkel gar nicht repräsentirt wird, keine Anwendung bey einer Untersuchung, welche auf eine als möglich vorauszusetzende Aenderung dieses rechten Winkels mitbegründet werden muß.

vermehrt um $\frac{\Delta b}{b} \cdot \widehat{\Delta A} \cdot \cot A$, und dividirt durch $1 + \widehat{\Delta B} \cdot \cot B$, sich diesseits seiner Kleinheitsgrenze nicht ändert.

Man wird den positiven Grenzwerth für $\frac{\Delta a}{a}$ erhalten, wenn man in dieser Formel, falls

A,	B;		für $\frac{\Delta b}{b}$,	$\widehat{\Delta A}$,	$\widehat{\Delta B}$,
spitz,	spitz	ist	den positiven,	den positiven,	den negativen
stumpf,	spitz	ist	den positiven,	d. negativen,	den negativen
spitz,	stumpf	ist	den positiven,	den positiven,	den positiven

Grenzwerth setzt.

Sind die Grenzwerthe von $\widehat{\Delta A}$ und $\widehat{\Delta B}$ der Größe nach gleich, so wird im ersten Falle der Grenzwerth für

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} + \widehat{\Delta A} \cdot (\cot A + \cot B);$$

im zweyten und dritten

$$= \frac{\Delta b}{b} + \widehat{\Delta A} \cdot (\cot A - \cot B).$$

2. Aus zwey Seiten, a, b, und dem Gegenwinkel der einen, A, den der anderen, B, zu finden:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Mit ihr verbindet sich:

$$\widehat{\Delta B} = \left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a} + \widehat{\Delta A} \cdot \cot A\right) : \cot B.$$

Geltend, wenn das aus ihr berechnete $\widehat{\Delta B}$, im Zähler um $\frac{\Delta b}{b} \cdot \widehat{\Delta A} \cdot \cot A$, im Nenner um $\frac{\Delta a}{a} \cdot \cot B$

vermehrt, sich um weniger, als seine Kleinheitsgrenze beträgt, ändert.

Der positive Grenzwerth von ΔB wird erhalten, wenn darin, falls

A,	B;		für $\frac{\Delta b}{b}$,	$\frac{\Delta a}{a}$,	$\widehat{\Delta A}$
spitz,	spitz	ist	der positive,	der negative,	der positive
stumpf,	spitz	ist	der positive,	der negative,	der negative
spitz,	stumpf	ist	der negative,	der positive,	der negative

Grenzwerth substituirt wird.

Wenn der Größe nach die Grenzwerthe von $\frac{\Delta a}{a}$ und $\frac{\Delta b}{b}$ gleich sind, so wird der von $\widehat{\Delta B} = \left(\frac{2\,\Delta b}{b} + \widehat{\Delta A} \,.\, \cot A\right) : \cot B$.

B. Aus der zweyten Hauptgleichung der Trigonometrie: $c \sin A = a \sin(A + B)$, fließt die Lösung von vier Aufgaben:

3. Aus zwey Seiten, a, c, und dem eingeschlossenen Winkel, B, einen der anderen Winkel, A, zu finden: $\cot A = \frac{c - a \cos B}{a \sin B}$.

Dazu gehört:

$$\widehat{\Delta A} = \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c} + \widehat{\Delta B} \,.\, \cot(A + B)\right) : (\cot A - \cot(A + B)).$$

Anwendbar, wenn das gefundene $\widehat{\Delta A}$, im Zähler um $\frac{\Delta a}{a} \,.\, \widehat{\Delta B} \,.\, \cot(A + B)$, im Nenner um $-\frac{\Delta a}{a} \,.\, \cot(A + B) + \frac{\Delta c}{c} \,.\, \cot A$ vermehrt, um weniger, als seine Kleinheitsgrenze beträgt, geändert wird.

Sie gibt den positiven Grenzwerth von $\widehat{\Delta A}$, wenn,

falls $A + B$,	A;	für $\frac{\Delta a}{a}$,	$\frac{\Delta c}{c}$,	ΔB
spitz,	spitz	ist der positive,	der negative,	der positive
stumpf,	spitz	ist der positive,	der negative,	der negative
stumpf,	stumpf	ist der negative,	der positive,	der negative.

Grenzwerth gesetzt wird.

Wenn $\frac{\Delta a}{a}$ und $\frac{\Delta c}{c}$ gleich große Grenzwerthe haben, so wird der des $\widehat{\Delta A} = (2 \,.\, \frac{\Delta a}{a} + \widehat{\Delta B} \cot(A + B))$: $(\cot A - (\cot A + B))$.

4. Aus zwey Seiten, a, c, und dem Gegenwinkel der einen, A, den von beyden eingeschlossenen Winkel, B, zu finden:

$$\sin(A + B) = \frac{c \sin A}{a}; \quad (A + B) - A = B.$$

Zu dieser Formel gehört:

$$\widehat{\Delta B} = (\frac{\Delta c}{c} - \frac{\Delta a}{a} + (\widehat{\Delta A} \,.\, (\cot A - \cot(A + B))) : \cot(A + B).$$

Diese Formel ist sicher zu brauchen, wenn ihr Werth für $\widehat{\Delta B}$, im Zähler um

$$\left(\frac{\Delta c}{c} \cot A - \frac{\Delta a}{a} \,.\, \cot(A + B)\right) \widehat{\Delta A},$$

im Nenner um $\frac{\Delta a}{a} \cot(A + B)$ vermehrt, sich weniger ändert, als die Kleinheitsgrenze des $\widehat{\Delta B}$ beträgt.

Man wird den positiven Grenzwerth für $\widehat{\Delta B}$ erhalten, wenn man, falls

$A + B$,	A;		für $\frac{\Delta c}{c}$,	$\frac{\Delta a}{a}$,	$\widehat{\Delta A}$
spitz,	spitz	ist	den positiven,	den negativen,	den positiven
stumpf,	spitz	ist	d. negativen,	den positiven,	den negativen
stumpf,	stumpf	ist	d. negativen,	den positiven,	den positiven

Grenzwerth substituirt.

Haben $\frac{\Delta a}{a}$ und $\frac{\Delta c}{c}$ der Größe nach gleiche Grenzwerthe, so ist der des $\widehat{\Delta B} = \frac{2 \Delta c}{c} + \widehat{\Delta A} \cdot (\cot A - \cot(A + B)) : \cot(A + B)$.

5. Aus zwey Winkeln, A, B, und der Gegenseite des einen, a, die von beyden Winkeln eingeschlossene Seite, c, zu finden:

$$c = \frac{a \sin(A + B)}{\sin A}.$$

Zu dieser Formel gesellt sich:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \widehat{\Delta B} \cdot \cot(A + B) - \widehat{\Delta A} \cdot (\cot A - \cot(A + B)).$$

Statthaft, wenn das gefundene $\frac{\Delta c}{c}$, um

$$\frac{\Delta a}{a} \cdot (\widehat{\Delta A} + \widehat{\Delta B}) \cot(A + B)$$

vermehrt, und durch $1 + \widehat{\Delta A} \cdot \cot A$ dividirt, sich um weniger, als die Kleinheitsgrenze für $\frac{\Delta c}{c}$ beträgt, ändern würde.

Man erhält aus ihr den positiven Grenzwerth des $\frac{\Delta c}{c}$, wenn, falls

$A+B$,	A;		für $\frac{\Delta a}{a}$,	$\widehat{\Delta A}$,	$\widehat{\Delta B}$
spitz,	spitz	ist	der positive,	der negative,	der positive
stumpf,	spitz	ist	der positive,	der negative,	der negative
stumpf,	stumpf	ist	der positive,	der positive,	der negative

Grenzwerth gesetzt wird.

Sie gibt, wenn die Grenzwerthe für $\widehat{\Delta A}$ und $\widehat{\Delta B}$ der Größe nach gleich sind, den des $\frac{\Delta c}{c}$ im ersten und dritten Fall $= \frac{\Delta a}{a} + \widehat{\Delta B} \cdot \cot A$, im zweyten $= \frac{\Delta a}{a} + \widehat{\Delta B} \cdot (2 \cot(A+B) - \cot A)$.

6. Aus einer Seite, c, und den beyden ihr anliegenden Winkeln, A, B, eine der anderen Seiten, a, zu finden:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin(A+B)}.$$

Mit ihr verbindet sich:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c} + \widehat{\Delta A} \cdot (\cot A - \cot(A+B)) - \widehat{\Delta B} \cdot \cot(A+B).$$

Sie gilt, wenn das aus ihr berechnete $\frac{\Delta a}{a}$, um $\frac{\Delta c}{c} \cdot \widehat{\Delta A} \cot A$ vermehrt, und durch $1 + \frac{\Delta a}{a} (\widehat{\Delta A} + \widehat{\Delta B}) \cdot \cot(A+B)$ dividirt, sich um weniger, als seine Kleinheitsgrenze ausmacht, verändert.

Sie gibt den positiven Grenzwerth des $\frac{\Delta a}{a}$, wenn in ihr, falls

$A + B$,	A;		für $\frac{\Delta c}{c}$,	$\widehat{\Delta A}$,	$\widehat{\Delta B}$
spitz,	spitz	ist	der positive,	der positive,	der negative
stumpf,	spitz	ist	der positive,	der positive,	der positive
stumpf,	stumpf	ist	der positive,	der negative,	der positive

Grenzwerth in ihr substituirt wird.

Sind die Grenzwerthe von $\widehat{\Delta A}$ und $\widehat{\Delta B}$ der Größe nach gleich, so gibt sie im ersten und dritten Falle den für $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta c}{c} + \widehat{\Delta A} \,.\, \cot A$, im zweyten $= \frac{\Delta c}{c} + \widehat{\Delta A} \,.\, (\cot A - 2 \,.\, \cot(A + B))$.

C. Aus der dritten Hauptgleichung der Trigonometrie: $b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A = a^2$, erledigen sich folgende drey Aufgaben:

7. Aus zwey Seiten, a, b, und dem Gegenwinkel der einen, A, die dritte Seite, c, zu finden:

$$b \cos A + \sqrt{(a^2 - b^2 \sin A^2)} = c.$$

Dazu gehört:

$$\frac{\Delta c}{c} = (\frac{\Delta a}{a} \,.\, a^2 - \frac{\Delta b}{b} \,.\, b\,(b - c \cos A) - \widehat{\Delta A} \,.\, bc \sin A) : c\,(c - b \cos A).$$

Ihre Gültigkeit erfordert, daß der gefundene Werth des $\frac{\Delta c}{c}$, im Zähler um $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 \,.\, \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\Delta b}{a}\right)^2 \,.\, \frac{b^2}{2} - \frac{\Delta b}{b} \,.\, \widehat{\Delta A} \,.\, bc \sin A$, im Nenner um $(\widehat{\Delta A} \,.\, \sin A - \frac{\Delta b}{b} \,.\, \cos A + \frac{\Delta b}{b} \,.\, \widehat{\Delta A} \sin A)\, bc$ vermehrt, sich um

nicht so viel andere, als die Kleinheitsgrenze des $\frac{\Delta c}{c}$ beträgt, und das Quadrat dieses neuen Bruches, mit einem anderen multiplicirt, der gleichen Nenner wie er, zum Zähler aber $\frac{1}{2} c^2$ hat, unter jener Kleinheitsgrenze bleibt.

Diese Formel gibt den positiven Grenzwerth des $\frac{\Delta c}{c}$, wenn, falls

$\frac{b}{c}$,	$\frac{c}{b}$;		für $\frac{\Delta a}{a}$,	$\frac{\Delta b}{b}$,	$\widehat{\Delta A}$
$>$ cos A,	$>$ cos A	ist	der positive,	der negative,	der negative
$>$ cos A,	$<$ cos A	ist	der negative,	der positive,	der positive
$<$ cos A,	$>$ cos A *)	ist	der positive,	der negative,	der negative

Grenzwerth in ihr gesetzt wird.

Sind die Grenzwerthe für $\frac{\Delta a}{a}$ und $\frac{\Delta b}{b}$ gleicher Größe, so gibt sie im ersten und zweyten Falle den des

$$\frac{\Delta c}{c} = \left(\frac{\Delta a}{a} . (a^2 + b (b - c \cos A)) - \widehat{\Delta A} . bc \sin A\right) : c (c - b \cos A),$$

im dritten

$$= \left(\frac{\Delta a}{a} (a^2 - b . (b - c \cos A)) - \widehat{\Delta A} . bc \sin A\right) : c . (c - b \cos A).$$

*) Es versteht sich eigentlich von selbst, daß, sobald $\frac{b}{c} <$ cos A, alsdann $\frac{c}{b} >$ cos A seyn muß, so wie, daß der Fall $\frac{b}{c} <$ cos A und $\frac{c}{b} <$ cos A undenkbar ist.

28. Aus zwey Seiten, b, c, und dem durch sie eingeschlossenen Winkel, A, die dritte Seite, a, zu finden:

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}.$$

Zu ihr gehört die Formel:

$$\frac{\Delta a}{a} = \left(\frac{\Delta b}{b} \cdot b\,(b - c \cos A) + \frac{\Delta c}{c} \cdot c\,(c - b \cos A) + \widehat{\Delta A} \cdot bc \sin A\right) : a^2.$$

Sie ist gültig, wenn das aus ihr bestimmte $\frac{\Delta a}{a}$, falls man seinem Zähler

$$\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{2} + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{2} + \left\{\left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}\right) . \widehat{\Delta A} \cdot \sin A - \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{\Delta c}{c} \cdot \cos A\right\} bc,$$

zusetzt, nicht so viel, als seine Kleinheitsgrenze ausmacht, geändert wird, auch das Quadrat des so entstandenen Bruches, zur Hälfte genommen, unter dieser Kleinheitsgrenze bleibt.

Sie gibt den positiven Grenzwerth des $\frac{\Delta a}{a}$, wenn man in ihr, falls

$\frac{b}{c}$,	$\frac{c}{b}$;		für $\frac{\Delta b}{b}$,	$\frac{\Delta c}{c}$,	$\widehat{\Delta A}$
$>$ cos A,	$>$ cos A	ist	den positiven,	den positiven,	den positiven
$>$ cos A,	$<$ cos A	ist	den positiven,	den negativen,	den positiven
$<$ cos A,	$>$ cos A	ist	den negativen,	den positiven,	den positiven

Grenzwerth substituirt.

Sind die Grenzwerthe von $\frac{\Delta b}{b}$ und $\frac{\Delta c}{c}$ gleich groß, so gibt sie den von $\frac{\Delta a}{a}$ im ersten und dritten Falle

$$= \frac{\Delta b}{b} + \widehat{\Delta A} \,.\, \frac{bc \sin A}{a^2}; \text{ im zweyten}$$

$$= \frac{\Delta b}{b} \,.\, \frac{(b^2 - c^2)}{a^2} + \frac{\widehat{\Delta A} \,.\, bc \sin A}{a^2}.$$

9. Aus den drey Seiten, a, b, c, einen Winkel, A, zu finden:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dazu gehört die Formel:

$$\widehat{\Delta A} = \left(\frac{\Delta a}{a} \,.\, a^2 - \frac{\Delta b}{b} \,.\, b\,(b - c \cos A) - \frac{\Delta c}{c} \,.\, c\,(c - b \cos A)\right) : bc \sin A.$$

Sie ist zulässig, wenn das nach ihr berechnete $\widehat{\Delta A}$, im Zähler um

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 \,.\, \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 \,.\, \frac{b^2}{2} - \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 \,.\, \frac{c^2}{2} + \frac{\Delta b}{b} \,.\, \frac{\Delta c}{c} \,.\, \cos A, \text{ im Nenner um}$$

$$\left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta b}{b} \,.\, \frac{\Delta c}{c}\right) \,.\, \widehat{\Delta A} \,.\, bc \sin A$$

vermehrt, sich um weniger ändert, als seine Kleinheitsgrenze beträgt.

Sie gibt den positiven Grenzwerth des $\widehat{\Delta A}$, wenn in ihr, falls

$\frac{b}{c}$,	$\frac{c}{b}$;		für $\frac{\Delta a}{a}$,	$\frac{\Delta b}{b}$,	$\frac{\Delta c}{c}$
$> \cos A$,	$> \cos A$	ist	der positive,	der negative,	der negative
$> \cos A$,	$< \cos A$	ist	der positive,	der negative,	der positive
$< \cos A$,	$> \cos A$	ist	der positive,	der positive,	der negative

Grenzwerth gesetzt wird.

Sind die Gränzwerthe von $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$ gleicher Größe, so wird der des ΔA im ersten Fall

$$= \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{2a^2}{bc \sin A},$$

im zweyten

$$= \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{bc \sin A},$$

im dritten

$$= \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{bc \sin A}.$$

Druckfehler.

S. 51. Z. 4. statt letzten lies vorletzten.
— 51. — 7. v. u. st. Viertes l. Fünftes.
— 97. — 7. v. u. st. $\sqrt{}$ l. $\sqrt[n]{}$.
— 98. —12. st. $\sqrt[3]{(a^4)}$ l. $(\sqrt[3]{a})^4$.
—122. — 3. st. $\frac{\beta}{\gamma}$ l. $\frac{\gamma}{\beta}$.
—122. —10. st. $\frac{\log b}{\log e}$ l. $\frac{\log e}{\log b}$.
—130. — 1. st. einen l. keinen.
—138. — 2. v. u. st. . 6 l. — 6.
—139. — 3. v. u. st. 5|08484835 l. 4|94848485.
—140. — 1. v. u. st. ,28674 l. ,28576.
—147. fehlt zwischen Z. 18 u. 19 die Zeile 653515999.
—147. —11. v. u sind als Decimalen ,55547 zu setzen.
—152. — 4. v. u. st. ,333333 unfehlbar bis in seiner, l. ,333333 unfehlbar bis in seine letzte.
—156. — 3. v. u. st. $= u$ l. $- u$.
—157. — 5. st. 4 l. —4.
—161. — 7. v. u st. 881 l. 81.
—174. — 5. v. u. st. ausfüllen l. ausfallen.
—176. — 2. v. u. st. $\frac{1}{n}B$ l. $\frac{1}{n}A$.
—177. — 6. st. sie l. sie als.
—219. — 5. st. B l. b.
—255. — 7. st. BCB, ACG l. ACB, BCG.
—274. —10. st. AED l. AEB.
—319. — 2. v. u. st. AC l. BC.
—321. — 5. st. A l. B.
—321. — 5. v. u. ist hinter AD zu setzen (fig. 59.)
— 2. st. (fig. 59.) l. (fig. 58.).
—359. — 8. v. u. st. C. l. II.
—362. — 8. v. u. st sin b l. sin a.
—364. —12. v. u. st. $\widehat{b}$, cos a l. $\widehat{b}$. cos a.
—370. — 4 u. 8. st. CD l. BD.
—401. — 4 u. 5. v. u. muß $\sin(A+B)+(\Delta A+\Delta B).\cos(A+B)$ eingeklammert werden.

I.

Tafel
der
Briggischen Logarithmen
für alle Zahlen von 1 bis 10000.

Steht hinter einer abgebrochenen Zahl in dieser oder in der nachfolgenden Tafel unten kein Punct, so beträgt das bey ihr durch Abbrechen Weggelassene weniger als die Hälfte einer Einheit vom Range ihrer letzten Decimalstelle.

Steht ein Punct hinter ihr unten, so beläuft sich das, was bey ihr weggelassen worden, auf mehr als die Hälfte einer Einheit vom Range ihrer untersten Decimalstelle.

Steht kein Punct hinter ihr oben, so ist dasjenige, was bey ihr durch Abbrechen weggelassen worden, kleiner als bey der ihr unmittelbar vorangehenden.

Steht ein Punct hinter ihr oben, so ist das durch Abbrechen Weggefallene bey ihr größer als bey der nächstvorhergehenden.

	0	1	2	3	4
0	— ∞	0,00000	0,30102:	0,47712	0,60205:
1	1,00000	1,04139·	1,07918	1,11394·	1,14612:
2	1,30102:	1,32221.	1,34242	1,36172:	1,38021
3	1,47712	1,49136·	1,50514:	1,51851	1,53147:
4	1,60205:	1,61278	1,62324:	1,63346.	1,64345
5	1,69897	1,70757·	1,71600·	1,72427:	1,73239
6	1,77815.	1,78532:	1,79239	1,79934	1,80617:
7	1,84509.	1,85125:	1,85733	1,86332·	1,86923
8	1,90308:	1,90848:	1,91381	1,91907:	1,92427:
9	1,95424·	1,95904	1,96378:	1,96848	1,97312:
10	2,00000	2,00432·	2,00860	2,01283:	2,01703
11	2,04139	2,04532·	2,04921:	2,05307:	2,05690
12	2,07918	2,08278:	2,08635:	2,08990.	2,09342
13	2,11394	2,11727	2,12057·	2,12385	2,12710·
14	2,14612:	2,14921:	2,15228.	2,15533.	2,15836
15	2,17609	2,17897.	2,18184	2,18469	2,18752
16	2,20411:	2,20682.	2,20951.	2,21218:	2,21484
17	2,23044:	2,23300.	2,23552:	2,23804.	2,24054:
18	2,25527	2,25767:	2,26007	2,26245	2,26481:
19	2,27875:	2,28103	2,28330	2,28555:	2,28780
20	2,30102:	2,30319.	2,30535	2,30749:	2,30963
21	2,32221:	2,32428	2,32633:	2,32837:	2,33041
22	2,34242	2,34439	2,34635·	2,34830·	2,35024:
23	2,36172.	2,36361	2,36548:	2,36735.	2,36921.
24	2,38021	2,38201:	2,38381·	2,38560:	2,38738:
25	2,39794	2,39967·	2,40140	2,40312	2,40483·
26	2,41497	2,41664	2,41830·	2,41995:	2,42160
27	2,43136·	2,43296:	2,43456.	2,43616	2,43775
28	2,44715:	2,44870.	2,45024:	2,45178.	2,45331:
29	2,46239:	2,46389	2,46538	2,46686:	2,46834.
30	2,47712·	2,47856:	2,48000:	2,48144	2,48287·
31	2,49136	2,49276	2,49415·	2,49554	2,49692:
32	2,50514:	2,50650.	2,50785:	2,50920	2,51054:
33	2,51851	2,51982:	2,52113:	2,52244	2,52374:
34	2,53147.	2,53275	2,53402:	2,53529	2,53655:
35	2,54406:	2,54530.	2,54654	2,54777·	2,54900:
36	2,55630	2,55750:	2,55870.	2,55990:	2,56110
37	2,56820	2,56937·	2,57054	2,57170:	2,57287
38	2,57978	2,58092	2,58206	2,58319:	2,58433
39	2,59106	2,59217:	2,59328.	2,59439	2,59549:
40	2,60205:	2,60314	2,60422:	2,60530.	2,60638
41	2,61278·	2,61384	2,61489:	2,61595	2,61700·
42	2,62324:	2,62428	2,62531·	2,62634	2,62736:
43	2,63346:	2,63447.	2,63548	2,63648:	2,63748:
44	2,64345	2,64443:	2,64542	2,64640·	2,64738
45	2,65321	2,65417·	2,65513:	2,65609.	2,65705.
46	2,66275:	2,66370	2,66464·	2,66558	2,66651:
47	2,67209:	2,67302	2,67394·	2,67486	2,67577:
48	2,68124	2,68214:	2,68304:	2,68394:	2,68484.
49	2,69019.	2,69108	2,69196:	2,69284:	2,69372:
	0	1	2	3	4

	5	6	7	8	9
0	0,69897	0,77815	0,84509	0,90309	0,95424
1	1,17609	1,20411	1,23044	1,25527	1,27875
2	1,39794	1,41497	1,43136	1,44715	1,46239
3	1,54406	1,55630	1,56820	1,57978	1,59106
4	1,65321	1,66275	1,67209	1,68124	1,69019
5	1,74036	1,74818	1,75587	1,76342	1,77085
6	1,81291	1,81954	1,82607	1,83250	1,83885
7	1,87506	1,88081	1,88649	1,89209	1,89762
8	1,92941	1,93449	1,93951	1,94448	1,94939
9	1,97772	1,98227	1,98677	1,99122	1,99563
10	2,02118	2,02530	2,02938	2,03342	2,03742
11	2,06069	2,06445	2,06818	2,07188	2,07554
12	2,09691	2,10037	2,10380	2,10720	2,11058
13	2,13033	2,13353	2,13672	2,13987	2,14301
14	2,16136	2,16435	2,16731	2,17026	2,17318
15	2,19033	2,19312	2,19589	2,19865	2,20139
16	2,21748	2,22010	2,22271	2,22530	2,22788
17	2,24303	2,27551	2,24797	2,25042	2,25285
18	2,26717	2,26951	2,27184	2,27415	2,27646
19	2,29003	2,29225	2,29446	2,29666	2,29885
20	2,31175	2,31386	2,31597	2,31806	2,32014
21	2,33243	2,33445	2,33645	2,33845	2,34044
22	2,35218	2,35410	2,35602	2,35793	2,35983
23	2,37106	2,37291	2,37474	2,37657	2,37839
24	2,38916	2,39093	2,39269	2,39445	2,39619
25	2,40654	2,40823	2,40993	2,41161	2,41329
26	2,42324	2,42488	2,42651	2,42813	2,42975
27	2,43933	2,44090	2,44247	2,44404	2,44560
28	2,45484	2,45636	2,45788	2,45939	2,46089
29	2,46982	2,47129	2,47275	2,47421	2,47567
30	2,48429	2,48572	2,48713	2,48855	2,48995
31	2,19831	2,49968	2,50105	2,50242	2,50379
32	2,51188	2,51321	2,51454	2,51587	2,51719
33	2,52504	2,52633	2,52762	2,52891	2,53019
34	2,53781	2,53907	2,54032	2,54157	2,54282
35	2,55022	2,55144	2,55266	2,55388	2,55509
36	2,56229	2,56348	2,56466	2,56584	2,56702
37	2,57403	2,57518	2,57634	2,57749	2,57863
38	2,58546	2,58658	2,58771	2,58883	2,58994
39	2,59659	2,59769	2,59879	2,59988	2,60097
40	2,60745	2,60852	2,60959	2,61066	2,51172
41	2,61804	2,61909	2,62013	2,62117	2,62221
42	2,62838	2,62940	2,63042	2,63144	2,63245
43	2,63848	2,63948	2,64048	2,64147	2,64246
44	2,64836	2,64933	2,65030	2,65127	2,65224
45	2,65801	2,65896	2,65991	2,66086	2,66181
46	2,66745	2,66838	2,66931	2,67024	2,67117
47	2,67669	2,67760	2,67851	2,67942	2,68033
48	2,68574	2,68663	2,68752	2,68841	2,68930
49	2,69460	2,69548	2,69635	2,69722	2,69810
	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69	897	983:	*079	*156:	*243	*329·	*415	*500:	*585	*671:
51	70	757	842·	926:	*011.	*096	*180:	*264:	*349	*432:	*516.
52	71	600	683:	767	850·	933	*015:	*098.	*131	*263·	*345:
53	72	427:	509	591	672:	754	835·	916·	997	*078	*159:
54	73	239	319:	399:	479:	559.	639.	719	798:	878	957·
55	74	036·	115	193:	272.	350:	429	507·	585:	663	741
56		818:	896	973:	*050:	*127:	*204.	*281.	*358	*434:	*511
57	75	597·	663:	739.	815	891	966:	*042	*117:	*192.	*267:
58	76	342.	417:	492	566:	641	715:	789:	863:	937.	*011·
59	77	095	159:	232	305·	378:	451:	524.	597	670	742:
60		915	887·	959:	*031:	*103.	*175.	*247	*318:	*390	*461:
61	78	531:	604	675·	746	916:	887.	958	*028:	*098:	169
62	79	239·	309	379	448:	518	578	657·	726:	795:	865
63		934	*002:	*071.	*140	*208:	*277	*345:	*413:	*482	*550·
64	80	617:	685.	753.	821	888:	955:	*023	*090·	*157:	*224
65	81	291.	358	424:	491	557:	624	690·	756:	822:	888.
66		954	*020	*085:	*151	*216:	*282	*347·	*412:	*477:	*542.
67	82	607	672	736:	801.	865:	930	994:	*059:	*122:	*186:
68	68	250.	314.	378	442	505:	569	632·	695:	758:	821:
69		884.	947.	*010.	*073	*135:	*198	*260:	*323	*385:	*447:
70	84	509:	571.	633.	695.	757	818:	880	941:	003	064:
71	85	125:	186:	247:	309.	369.	430.	491	551:	612	672:
72		733	793:	853:	913:	973:	*033.	*093.	*153	*213	*272:
73	86	332	891:	451	510·	569:	628:	687:	746.	805.	864
74		923	931:	*040	*098:	*157	*215:	*273:	*332	*390.	*448·
75	87	506	563:	621.	679	737	794:	852	909:	966:	*024
76	88	081·	138·	195	252	309	366	422:	479.	536	592.
77		649	705·	761:	817	874	930·	986·	*042	*097:	*153.
78	89	209	265	320:	376	431:	486:	542	597·	562:	707:
79		762:	817.	872.	927	982	*036:	*091	*145:	*200	*254:
80	90	308:	363	417·	471:	525:	579.	633.	687	741	794:
81		848.	902	955:	*009	*062·	*115:	*169	*222·	*275·	*328·
82	91	381	434	487	539:	592.	645	698	750:	803	855·
83		907:	960	*012·	*064:	*116:	*168:	*220.	*272.	*324	*376
84	92	427:	479.	531	582:	634	685:	737	788·	839:	890:
85		941:	992.	*043:	*091.	*145.	*196.	*247	*298	*348:	*399
86	93	449:	500	550:	601	651·	701·	751:	801:	851:	901:
87		951.	*001	*051.	*101	*151	*200:	*250	*299:	*349	*398:
88	94	448	497·	546:	596	645·	694·	743·	792	841	890
89		939	987:	*036	*085	*133:	*182	*230:	*279	*327:	*375:
90	95	424	472·	520:	568:	616:	664:	712.	760.	808.	856
91		904	951:	999	*047	*094:	*142	*189·	*236:	*284	*331:
92	96	379:	425:	473	520·	567·	614	661	707:	754.	801.
93		848	894:	941.	988	*034:	*031	*127:	*173:	*220	*266:
94	97	312:	358:	405	451·	497·	543	589	634:	680.	726.
95		772	818	863:	909	954:	*000	*015:	*091	*136:	*181:
96	98	227	272·	317:	362:	407:	452:	497.	542.	587.	632
97		677	721:	766.	811	855:	900	944:	989	*033:	*078
98	99	122:	166:	211	255·	299:	343:	387:	431:	475.	519.
99		563.	607	651	694:	738.	782	825:	869.	913	956:
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	000	043·	086:	130	173·	216:	259:	302:	346	389·
1		432·	475	518	560:	603.	646.	689	732	774:	817
2		860	902:	945	987:	*029:	*072	*114:	*157	*199·	*241:
3	01	283:	325:	367:	410	452·	494	535:	577.	619.	661.
4		703	745	786:	828	870	911:	953	994:	*036	*077:
5	02	118:	160	201:	242:	284	325·	366·	407·	448:	489:
06		530.	571.	612	653	694	734:	775.	816	857	897:
07		938	978:	*019	*059:	*100	*140:	*181	*221:	*261:	*302
08	03	342·	382:	422:	462:	502:	542:	582:	622.	662:	702.
09		742.	782	822	862	901:	941	981	*020:	*060	*099:
10	04	139	178:	218	257:	296:	336	375:	414:	453:	493
11		532·	571·	610·	649:	688:	727	766	805	844	883
12		921:	960.	999	*037:	*076.	*115	*153:	*192	*230:	*269
13	05	307:	346	384:	422:	461	499:	537:	576	614·	652·
14		690·	728:	766:	804:	842.	880.	918	956.	994	*032
15	06	069:	107.	145	182:	220.	258	295:	333	370:	408
16		445:	483	520:	557:	595	632:	669:	707	744·	781·
17		818·	855:	892:	929:	966:	*003.	*040.	*077.	*114.	*151
18	07	188	224:	261.	298	335	371:	408	445	481:	518
19		554:	591	627:	664	700·	736:	773	809·	845:	881:
120		918	954·	990·	*026:	*062:	*098:	*134:	*170.	*206.	*242
121	08	279.	314	350	386	421:	457.	493	529	564:	600
122		635:	671.	707	742:	778	813:	849	884·	919:	955
123		990:	*025:	*061	*096·	*131:	*166:	*201:	*236:	*272	*307·
124	09	342·	377·	412	447	482	516:	551.	586.	621	656
125		691	725:	760	795	829:	864	898:	933.	968	*002:
126	10	037	071:	105:	140	174:	209	243·	277:	311:	346
127		380·	414:	448:	482:	516:	551.	585·	619·	653	687
28		720:	754.	788.	822.	856.	890	924	957:	991.	*025
29	11	058:	092.	126	159:	193	226:	260.	293:	327	360:
30		394	427:	461	494·	527:	561	594·	627:	660:	693:
31		727	760·	793·	826·	859:	892:	925:	958.	991.	*024.
32	12	057	090	123	155:	188.	221	254	287	319:	352
33		385	417:	450	483	515:	548	580:	613	645:	678
34		710·	742:	775	807:	839:	872·	904:	936:	968:	*001
35	13	033·	065:	097:	129:	161:	193:	225:	257:	289.	321.
36		353.	385.	417.	449.	481	513	545	576:	608.	640
37		672	703·	735	767	798:	830	861:	893	924:	956
38		987:	*019	*050:	*082	*113:	*144:	*176	*207:	*238:	*270
39	14	301·	332:	363:	395	426.	457·	488:	519:	550:	581:
40		612:	643:	674.	705.	736.	767.	798.	829	860	891
41		922·	952.	983	*014	*044:	*075.	*106	*136:	*167.	*198
42	15	229:	259	289:	320	350:	381	411·	442	472:	503
43		533:	563:	594	624:	654:	685	715·	745:	775:	806
44		836·	866·	896:	926:	956:	986:	*016:	*046:	*076:	*106.
45	16	136.	166.	196.	226.	256	286	316	345:	375.	405.
46		435	465	494:	524	554	583:	613	643	672:	702
147		731:	761	790:	820	849:	879	908:	938	967·	996:
148	17	026	055:	084:	114	143·	172:	201:	231	260·	289·
149		318:	347:	376:	405:	435	464·	493·	522·	551·	580
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17	609	638	666:	695.	724.	753.	782.	811	840	868:
151		897.	926	955	983:	*012.	*041	*069:	*098.	*127	*155:
152	18	184	212:	241	269:	298	326:	355	383:	412	440:
153		469	497:	525:	554	582:	610:	639	667·	695:	723:
154		752	780·	808·	836:	864:	892:	920:	949	977·	*005·
155	19	033·	061·	089	117	145	173	200:	228.	256.	284.
156		312	340	368	395:	423.	451	479	506:	534.	562
157		589:	617.	645	572:	700	728	755:	783	810:	838
158		865:	893	920:	948	975:	*002:	*030	*057:	*085	*112·
159	20	139:	167	194·	221:	248:	276	303·	330·	357:	384:
160		411:	439	466·	493·	520·	547.	574:	601:	628:	655.
161		682:	709.	736.	763	790·	817	844	871	897:	924.
162		951.	978	*005	*031:	*058.	*085	*112	*138:	*165	*192
163	21	219:	245	272	298:	325	351·	378	404:	431	457:
164		484	510:	537	563:	590	616:	642:	669	695:	722
165		748·	774:	801	827·	853:	879:	906	932·	958·	984:
166	22	010:	036:	063	089·	115·	141·	167	193:	219:	245:
167		271:	297.	323.	349.	375.	401	427	453	479	505
168		530:	556.	582.	608	634	659:	685.	711.	737	763:
169		788.	814	840	865:	891	916:	942.	968	993:	*019
170	23	044:	070	095:	121	146:	172	197:	223	248:	274
171		299:	325	350·	375:	401	426·	451:	477	502·	527:
172		552:	578	603·	628:	653:	678:	704	729·	754·	779·
173		804:	829:	854:	879:	904:	929:	954:	979:	*004.	*029.
174	24	054.	079.	104.	129.	154.	179.	204	229	254	278:
175		303.	328.	353	378	402:	427.	452	477	501:	526.
176		551	575:	600.	625	649:	674	699	723:	748	772:
177		797	821:	846	870:	895	919:	944	968:	993.	*017:
178	25	042	066·	090:	115	139·	163:	188	212·	236:	261
179		285·	309:	333:	358	382·	406·	430:	454:	478:	503
180		527·	551·	575·	599:	623:	647:	671:	695:	719:	743:
181		767:	791.	815.	839.	863.	887.	911.	935	959	983
182	26	007	030:	054.	078.	102	126	150	173:	197.	221
183		245	268:	292.	316	339:	363.	387	410:	434.	458
184		481:	505	528:	552.	576	599:	623	646:	670	693:
185		717	740:	764	787:	810:	834	857:	881	904:	927:
186		951	974:	997:	*021	*044:	*067:	*091	*114·	*137:	*160:
187	27	184	207·	230:	253:	276:	300	323·	346·	369:	392:
188		415:	438:	461:	485	508·	531·	554·	577·	600·	623
189		646	669	692	715	737:	760.	783.	806.	829.	852
190		875	898	921	943:	966.	989	*012	*035	*057:	*080.
191	28	103	126	148:	171.	194	216:	239.	262	284:	307
192		330	352:	375	397:	420.	443	465:	488	510:	533
193		555:	578	600:	623	645:	668	690:	712:	735	757:
194		780	802:	824:	847	869:	891:	914	936:	958:	981
195	29	003·	025:	047:	070	092·	114:	136:	159	181·	203.
196		225:	247:	269:	292	314·	336·	358·	380·	402:	424:
197		446:	468:	490:	512:	534:	556.	578	600.	622.	644.
198		666.	688	710	732	754	776	797:	819.	841.	863
199		885	907	928:	950.	972.	994	*016	*037:	*059.	*081
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	102:	124.	146	168	189;	211	233	254:	276	297;
	319.	341	362:	384	403:	427.	449	470:	492	513;
	535	556:	578	599;	621	642:	663;	685	706:	728
	749:	770:	792	813;	833	856	877;	899	920·	941;
	963	984·	•005·	•026;	•048	•069·	•090;	•111:	•132:	•154
31	175·	196:	217:	238;	260	281·	302·	323·	344:	365;
	386:	407:	428:	449;	470;	492	513·	534·	555·	576
	597	618	638:	659.	680.	701.	722.	743.	764.	785
	806	827	848	868;	889.	910.	931	952	973	993;
32	014.	035·	056	076;	097.	118	139	159:	180.	201
	221:	242.	263	283;	304.	325	345;	366	387	407;
	428	448:	469	489;	510	531	551;	572	592:	613
	633:	654	674:	694;	715	735;	756	776:	797	817;
	837:	858	878;	899	919·	939;	960	980·	•000:	•021
33	041·	061:	081;	102	122·	142;	162;	183	203·	223;
	213:	264	284·	304·	324;	344;	364;	335	405·	425·
	445·	465·	485;	505;	525;	545;	565;	585:	605:	625;
	645:	665:	685.	705.	725.	745.	765.	785.	805.	825.
	845:	865.	885	905	925	945	965	984:	•004.	•024.
34	044	064	084	103;	123.	143	163	183	202:	222.
	242	262	281;	301	321	340;	360.	380	399;	419.
	439	459:	478.	498	517;	537	556;	576.	596	615;
	635	651:	671	693;	713	733	752;	772	791;	811
	830·	849:	869	888;	908	927;	947	966:	986	•005·
35	024:	044	063;	082:	102	121;	140;	160	179;	198;
	218	237:	256;	276	295·	314;	333;	353	372·	391;
	410:	430	449·	468·	487;	506;	525;	545	564·	583·
	602:	621:	640;	659;	679	698·	717·	736·	755·	774·
	793·	812:	831;	850;	869;	888;	907;	926.	945.	964.
	983.	•002.	•021	•040	•059	•078	•097	•116	•135	•153;
36	172.	191.	210.	229	248	267	285;	304.	323.	342
	361	379:	398.	417.	436	455	473;	492	511	530
	548:	567.	586	604;	623.	642	660;	679.	698	716;
	735.	754	772;	791	810	828;	847	865:	884	903
	921:	940	958;	977	995;	•014	•032;	•051	•069;	•088
37	106:	125	143;	162	180;	199	217;	235:	254	272;
	291	309:	327;	346	364;	383	401·	419:	438	456;
	474:	493	511·	529;	548	566·	584:	602:	621	639·
	657:	675:	694	712	730;	749;	767	785·	803·	821;
	839:	857:	876	894·	912·	930:	948;	966:	984;	•003
38	021·	039·	057·	075·	093·	111;	129;	147:	165;	183;
	201:	219:	237;	255;	273.	291.	309.	327.	345.	363.
	381.	399	417	435	453	471	489	506:	524.	542.
	560.	578.	596	614	632	649;	667.	685.	703	721
	738:	756.	774.	792	810	827;	845.	863	881	898;
	916.	934	952	969;	987	•005	•022;	•040.	•058	•075;
39	093.	111	128;	146	164	181:	199	216.	234.	252
	269:	287	304:	322	339;	357.	375	392:	410	427;
	445	462:	480	497;	515	532;	550	567:	585	602·
	619:	637	654;	672	689;	707	724·	741:	759	776;
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
250	39	[illegible]	811 ·	828 :	846	863 ·	880 :	898	915 ·	
251		967 ·	984 :	•001 :	•019	•036 :	•053 :	•071	•038 ·	•
252	40	140	157 ·	174 :	191 :	208 :	226	243 ·	260 :	
253		312	329 ·	346 ·	363 :	390 :	397 :	414 :	432	
254		488 ·	500 ·	517 :	534 :	551 :	568 :	585 :	602 :	
255		654	671 ·	688 ·	705 ·	722 ·	739 ·	756	773	
256		823 :	840 .	857 .	874 .	891 .	908 .	925 .	942 .	
257		993	•010	•027	•043 :	•060 .	•077 .	•094 .	•111	•
258	41	161 :	178 .	195 .	212	229	246	262 :	279 .	
239		329 :	346 :	363	380	396 :	413 .	430	447	
260		497	514	530 :	547	564	580 :	597	614	
261		664	630 :	697	713 :	730 .	747	763 :	780	7
262		630	846 :	863	879 :	896	912 :	929	946	9
263		995 :	•012	•028 :	•045	•061 :	•078	•094 :	•111	•1
264	42	160	176 .	193	209 :	226	242 :	258 :	275	2
265		324 :	340 :	357	373 :	390	406 ·	422 :	439	4
266		488	504 ·	520 :	537	553 ·	569 :	586	602 ·	6
267		651	667 ·	683 :	699 :	716	732 ·	748 :	764 :	7
268		813 ·	829 :	845 :	862	878 ·	894 ·	910 :	926 :	9
269		975 ·	991 ·	•007 :	•023 :	•039 :	•055 :	•071 :	•088	•1
270	43	136 ·	152 ·	168 :	184 :	200 :	216 :	232 :	248 :	2
271		296 :	312 :	328 :	344 :	360 :	376 .	392 .	408 .	4
272		456 .	472 .	488 .	504 .	520 .	536 .	552 .	568 .	5
273		616	632	648	663 :	679 .	695 .	711 .	727	7
274		775	790 :	806 .	822 .	838	854	870	885 :	9
275		933	949	964 :	980 .	996	•012	•027 :	•043 .	•0
276	44	090 :	106 .	122	138	153 :	169 .	185	200 :	2
277		247 :	263 .	279	294 :	310 .	326	341 :	357 .	3
278		404 ,	420	435 :	451	466 :	482 .	498	513 :	5
279		560	575 :	591 .	607	622 :	638	653 :	669	6
280		715 :	731	746 :	762	777 :	793	808 :	824	8
281		870 :	886	901	916 :	932	947 :	963	979 :	9
282	45	024 :	040	055 :	071	086 ·	101 :	117	132 :	1
283		178 :	193 :	209	224 :	239 :	255	270 :	285 :	3
284		331 :	347	362 ·	377 :	392 :	408	323 ·	438 :	4
285		484 ·	499 :	514 :	530	545 ·	560 :	575 :	591	6
286		636 :	651 :	666 :	682	697 ·	712 ·	727 :	742 :	7
287		788 ·	803 ·	818 ·	833 :	848 :	863 :	878 :	893 :	9
288		939 ·	954 ·	969 ·	984 ·	999 :	•014 :	•029 :	•044 :	•0
289	46	089 :	104 :	119 :	134 :	149 :	164 :	179 .	194 .	2
290		239 .	254 .	269 .	284 .	299 .	314 .	329 .	344 .	35
291		389	404	419	434	448 :	463 .	478 .	493 .	50
292		538	553	568	582 :	597 .	612 .	627	642	65
293		686 .	701 .	716	731	746	760 :	775 .	790	80
294		834 .	849 .	864	879	893 :	908 .	923	938	95
295		982	996 :	•011 .	•026	•041	•055 :	•070	•085	•09
296	47	129	143 :	158 .	173	187 :	202	217	231 :	24
297		275 :	290	304 :	319	334	348 :	363	377 :	39
298		421 :	436	450 :	465	479 :	494	508 :	523 .	53
299		567	581 :	596	610 :	625	639 :	654	668 :	68
		0	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
726:	741	755:	769:	784	798:	813	827:	842
871	885·	899:	91[illegible]	929:	943	957:	971:	936
915	029·	043:	05[illegible]	072:	086:	101	115:	129:
158:	172:	187	201:	215:	230	241·	258:	273
301:	315:	330	344·	358:	372:	387	401·	415:
444	458·	472:	486:	501	515:	529:	543:	557:
586·	600:	614:	628:	643	657·	671·	685:	698:
727:	742	756·	770·	784:	798:	812:	826:	849:
869·	883·	897·	911·	925:	939:	953:	967:	981·
*009:	*023:	*037:	*052.	*066·	*080·	*094·	*108·	*122·
150·	164·	178	192	206	220	234	248	262
290	303:	317.	331.	345.	359.	373.	387.	401.
429	443	457	471	485	498:	512.	526.	540.
568	582	596	609:	623.	637.	651	665	679
706.	720.	734	748	762	775:	789.	803	817
844:	858.	872	886	899:	913.	927	941	954:
982	996	*009:	*023.	*037	*051	*064:	*078.	*092
119.	133	147	160:	174	198	201:	215	229
256	270	283:	297	310:	324.	338	351:	365
392:	406	419:	433	447	460:	474	487:	501
528.	542	555:	569	582:	596	609:	623	636:
664	677:	691	704:	718	731:	745	758:	772
799	812:	826	839:	852:	866	879:	893	906:
933:	947	960:	974	987·	*000:	*014	*027:	*041
067:	081	094:	108	121·	134:	148	161:	174:
201:	215	228·	241:	255	268·	281:	295	308·
335	348·	361:	375	388·	401:	414:	428	441·
468	481·	494:	507:	521	534·	547:	560:	574
600:	613:	627	640·	653:	666:	679:	693	706·
732·	745:	759	772·	785:	798:	811:	825	838·
864:	877:	899:	904	917·	930·	943·	956:	969:
995:	*009	*022·	*035·	*048·	*061·	*074:	*087:	*100:
126:	139:	153	166·	179·	192·	205·	218·	231·
257·	270·	283:	296:	309:	322:	335:	348:	361:
387:	400:	413.	426.	439.	452.	465.	478.	491.
517	530	543	556	569	582	595	608	621
646.	659.	672.	685.	698	711	724	737	750·
775.	788.	801.	814.	827	840	853	865:	878.
904.	917	930	943	955:	969.	981.	994	*007
032.	045.	058	071	083·	096.	109.	122	135
160.	173	186	198:	211.	224	237	249:	262.
288	300:	313.	326	339	351:	364	377	389:
415	428	440:	453	466	478:	491	504	516:
542	554:	567	580	592:	605	617:	630.	643
668	681	693:	706	718:	731.	744	756:	769
794	807	819:	832	844:	857	869:	882	895
920	932:	945	957:	970	982:	995	*007:	*020
045	057:	070	082:	095	107:	120	132:	145
170	182:	195	207:	220	232:	245	257:	270
294:	307	319:	332	344:	357	369:	381:	394
1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54	406:	419	431:	414	456'	468:	481	493:	505:	518
351		530:	543	555'	567:	580	592:	604:	617	629:	641:
352		654	666:	678:	691	703:	715:	7'8.	710:	752:	765
353		777'	789:	802	814'	826:	838:	851	863:	875:	888
354		900'	912:	924:	937	949'	961:	973:	986	998	*010:
355	55	022:	035	017'	059:	071:	083:	096	108'	120:	132:
356		144:	157	169'	181:	193:	205:	218	230'	242'	254:
357		266:	278:	291	303'	315'	327:	339:	351:	361	376'
358		388	400'	412:	424:	436:	448:	461	473'	485'	497'
359		509'	521:	533:	515:	557:	569:	581:	594	605	618'
360		630'	642'	654'	666'	678'	690:	702:	714:	726:	738:
361		750:	762:	774:	786:	798:	810:	822:	834:	846:	858:
362		870.	882.	894.	906.	918.	930.	942.	954.	966.	978.
363		990.	*002.	*014.	*026.	*038	*050	*062	074	*086	*098
364	56	110	122	133:	145.	157.	169.	181.	193.	205	217
365		229	241	253	264:	276.	288.	300.	312	324	336
366		348	359:	371.	383.	395.	407	419	431	442:	454.
367		466.	478	490	502	513:	525.	537.	519	561	572:
368		584.	596.	608	620	631:	643.	655.	667	679	690:
369		702.	714	726	737:	749.	761	773	784:	796.	808
370		820	831:	843.	855	867	878:	890.	902	913:	925.
371		937'	949	960:	972	984	995:	*007.	019	*030:	042.
372	57	054	065:	077.	089	100:	112.	124	135:	147.	159
373		170:	182.	194	205:	217	229	240:	252	263:	275.
374		287	298:	310	321:	333.	345	356:	368	379:	391.
375		403	414:	426	437:	449	460:	472.	484	495.	507
376		518:	530	541:	553	564:	576	588	599:	611	622:
377		634	645:	657	668:	680	691:	703	714:	726	737:
378		749	760:	772	783:	795	806:	818	829:	840:	852
379		863:	875	886:	898	909:	921	932:	944	955'	966:
380		978	989:	*001	*012:	*024	*035'	046:	*058	*069:	*081
381	58	092'	103:	115	126:	138	149'	160:	172	183:	194:
382		206	217:	229	240'	251:	263	274'	285:	297	308:
383		319:	331	312:	353:	365	376:	387:	399	410'	421:
384		433	444'	455:	467	478'	489'	500:	512	523'	534:
385		546	557'	568:	579:	591	602'	613:	624:	636	647'
386		658:	669:	681	692'	703:	714:	726	737'	748:	759:
387		771	782'	793:	804:	815:	827	838'	849:	860:	871:
388		883	894'	905:	916:	927:	939	950'	961'	972:	983:
389		994:	*006	*017:	*028'	*039:	*050:	*061:	*073	*084'	*095'
390	59	106'	117:	128:	139:	150:	162	173'	184'	195'	206:
391		217:	228:	239:	250:	262	273'	284'	295'	306'	317:
392		328:	339:	350:	361:	372:	383:	395	406'	417'	428'
393		439'	450'	461'	472'	483'	494'	505:	516:	527:	538:
394		549:	560:	571:	582:	593:	604:	615:	626:	637:	648.
395		659.	670.	681.	692.	703.	714.	725.	736.	747.	758.
396		769.	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397		879	889:	900.	911.	922.	933.	944.	955.	966	977
398		988	999	*010	*021	*031:	*042.	*053.	*064.	*075.	*086
399	60	097	108	119	129:	140.	151.	162.	173	184	195
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	205	216·	227.	238.	249	260	271	281:	292.	303.
	314	325	336	346:	357.	368.	379	390	400:	411.
	422.	433	444	455	465:	476.	487	498	509:	519.
	530.	541	552	562:	573.	584	595	605:	616.	627
	638	648:	659.	670	681	691:	702.	713	724	734:
	745.	756	766:	777.	788	799	809:	820.	831	841:
	852.	863	873:	884.	895	906	916:	927	938	948:
	959	970	980:	991	*002	*012:	*023	*034	*044:	*055
61	066	076:	087	097:	108.	119	129:	140	151	161:
	172	182:	193.	204	214:	225	235:	246.	257	267:
	278	288:	299.	310	320:	331	341:	352	363	373:
	384	394:	403	415:	426	436:	447.	458	468:	479
	489:	500	510:	521	531:	542	552:	563	573:	584
	595	605:	616	626:	637	647:	658	668:	679	689:
	700	710:	721	731·	741:	752	762:	773	783:	794
	804:	815	825:	836·	846:	857	867:	878	888·	898:
	909	919:	930	940:	951	961:	971:	982	992:	*003
62	013:	024	034·	044:	055	065:	076	086·	096:	107
	117:	128	138·	148:	159	169:	179:	190	200:	211
	221·	231:	212	252·	262:	278	283:	293:	304	314:
	324·	335	345:	355:	366	376:	386:	397	407:	417:
	428	439:	448:	459	469·	479:	490	500·	510:	520:
	531	541:	551:	562	572·	582:	592:	603	613·	623:
	634	644·	654:	664:	675	685·	695:	705:	716	726·
	736:	746:	757	767·	777:	787:	797:	808	818·	828:
	838:	849	859·	869:	879:	889:	900	910·	920:	930:
	940:	951	961·	971:	981:	991.	*002	*012·	*022·	*032:
63	042:	052:	063	073·	083·	093:	103:	113:	124	134·
	144·	154:	164:	174:	184:	195	205·	215·	225·	235:
	245:	255:	265:	276	286·	296·	306·	316:	326:	336·
	346:	356:	367	377·	387·	397·	407·	417·	427:	437.
	447:	457:	467:	477:	488	498·	508·	518·	528·	538·
	548·	558·	568·	578:	588:	598:	608:	618:	628:	638:
	648:	658:	668:	678:	688:	698:	708:	718:	728:	738:
	748:	758:	768:	778:	788.	798.	808.	818.	828.	838.
	848.	858.	868.	878.	888.	898.	908.	918.	928.	938.
	948.	958.	968.	978.	988	998	*008	*018	*028	*038
64	048	058	068	077:	087.	097·	107.	117.	127.	137
	147	157	167	177	187	196:	206.	216.	226.	236.
	246	256	266	276	286	295:	305.	315.	325.	335
	345	355	365	374:	384.	394.	404	414	424	434
	443:	453.	463.	473	483	493	502:	512.	522.	532
	542	552	561:	571.	581.	591	601	610:	620.	630.
	640	650	659:	669.	679.	689	699	708:	718.	728.
	738	748	757:	767.	777	787	796:	806.	816	826
	836	845:	855.	865	875	884:	894.	904	914	923:
	933	943	952:	962.	972	982	991:	*001.	*011	*021
65	030:	040	050	059:	069.	079	089	098:	108	118
	127:	137	147	156:	166.	176	185:	195.	205	214:
	224.	234	243:	253.	263	272:	282.	292	301:	311.
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
450	65	321	330:	340.	350.	359:	369	379	388:	398
451		417:	427	436:	446.	456	465:	475	485	494
452		513:	523	533	542:	552	561:	571	581	590
453		609:	619	628:	638.	648	657:	667	676:	686
454		705:	715	724:	734	743:	753	762:	772	782
455		801·	810:	820	829:	839	848:	858	867:	877
456		896	906	915:	925	934:	944	953:	963	972
457		991:	*001	*010:	*020	*029:	*039	*048:	*058	*067
458	66	086:	096	105:	114:	124	133:	143	152:	162
459		181	190:	200	209:	219	228:	238	247:	256.
460		275:	285	294:	304	313:	322:	332	341·	351
461		370	379:	388:	398	407:	417	426:	435:	445
462		464	473:	482:	492	501:	511	520:	529:	539
463		558	567·	576:	586	595:	604:	614	623:	633
464		651:	661	670:	679:	689	698:	707:	717	726.
465		745	754:	763:	773	782:	791:	801	810:	819.
466		838:	847:	857	866:	875:	885	894·	903:	913
467		931:	940:	950	959:	968:	978	987·	996:	*006
468	67	024:	033:	043	052·	061:	070:	080	089·	098.
469		117·	126:	135:	145	154·	163:	172:	182	191
470		209:	219	228·	237·	246:	255:	265	274·	283.
471		302	311·	320:	329:	338:	348	357·	366:	375.
472		394	403·	412:	421:	430:	440	449·	458:	467.
473		486	495·	504·	513:	522:	531:	541	550·	559.
474		577:	586:	596·	605·	614·	623:	632:	641:	651
475		669·	678:	687:	696:	705:	715	724·	733·	742·
476		760:	769:	778:	788	797·	806·	815·	824:	833.
477		851:	860:	870	879	888·	897·	906·	915:	924.
478		942:	951:	960:	970	979·	988·	997·	*006·	*015·
479	68	033:	042:	051:	060:	069:	078:	087:	096:	106
480		124·	133·	142·	151·	160·	169·	178·	187·	196·
481		214:	223:	232:	241:	250:	259:	268:	277:	286:
482		304:	313:	322:	331:	340:	349:	358:	367.	376.
483		394.	403.	412.	421.	430.	439.	448.	457.	466.
484		484.	493.	502	511	520	529	538	547	556
485		574	583	592	601	609:	618.	627.	636.	645.
486		663.	672.	681	690	699	708	717	726	735
487		752.	761.	770.	779.	788.	797	806	815	824
488		841:	850.	859.	868.	877.	886	895	904	913
489		930:	939.	948.	957.	966	975	984	993	*001:
490	69	019.	028	037	046	055	063:	072.	081.	090
491		108	116:	125.	134.	143.	152	161	170	178:
492		196.	205	214	222:	231.	240.	249	258	267
493		284.	293.	302	311	319:	328.	337.	346	355
494		372.	381	390	399	407:	416.	425	434	442:
495		460.	469	478	486:	495.	504	513	521:	530.
496		648	556:	565.	574	583	591:	600.	609	618
497		635.	644	653	661:	670.	679	688	696:	705
498		722:	731.	740	749	757:	766.	775	783:	792.
499		810	818:	827	836	844:	853.	862	870:	879.
		0	1	2	3	4	5	6	7	8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
69	897	905:	914	923	931:	940	949	957:	966	975
	983:	992	*001	*009:	*018	*027	*035:	*044	*053	*061:
70	070	079	087·	096	104:	113.	122	130:	139.	148
	156:	165	174	182:	191	199:	208.	217	225:	234
	243	251:	260	268:	277.	286	294:	303	311:	320.
	329	337:	346	354:	363.	372	380:	389	397:	406
	415	423:	432	440:	449	457:	466.	475	483:	492
	500:	509	517:	526	535	543:	552	560:	569	577:
	586	594:	603	612	620:	629	637:	646	654:	663
	671:	680	688:	697	705:	714	722:	731	739:	748.
	757	765:	774	782:	791	799:	808	816:	825	833:
	842	850:	859	867:	876	884:	893	901:	910	918:
	926:	935	943:	952	960:	969	977:	986	994:	*003
71	011:	020	028:	037	045:	054	062:	070:	079	087:
	096	104:	113	121:	130	138:	146:	155	163:	172
	180:	189	197:	206	214·	222:	231	239:	248	256:
	264:	273	281:	290	298:	307	315·	323:	332	340:
	349	357·	365:	374	382:	391	399·	407:	416	424:
	432:	441	449:	458	466·	474:	483	491:	499:	508
	516·	525	533·	541:	550	558:	566:	575	583:	591:
	600	608:	617	625·	633:	642	650·	658:	667	675·
	683:	692	700·	708:	717	725·	733:	742	750·	758:
	767	775·	783:	792	800·	808:	816:	825	833:	841:
	850	858	866:	875	883·	891:	899:	908	916:	924:
	933	941·	949:	957:	966	974:	982:	991	999·	*007:
72	015:	024	032·	040:	049	057·	065:	073:	082	090·
	098:	106:	115	123·	131:	139:	148	156·	164:	172:
	181	189·	197:	205:	214	222·	230·	238:	246:	255
	263·	271:	279:	288	296·	304·	312:	320:	329	337·
	345:	355:	361:	370	378·	386:	394:	402:	411	419·
	427:	435:	443:	452	460·	468:	476:	484:	493	501·
	509·	517:	525:	533:	542	550·	558:	566:	574:	582:
	591	599·	607·	615:	623:	631:	640	648·	656·	664:
	672:	680:	689	697·	705·	713·	721:	729:	737:	745:
	754	762·	770·	778:	786:	794:	802:	811	819·	827·
	835·	843·	851:	859:	867:	875:	884	892·	900·	908·
	916·	924:	932:	940:	948:	956:	965	973·	981·	989·
	997·	*005:	*013:	*021:	*029:	*037:	*045:	*054	*062·	*070·
73	078·	086·	094·	102·	110:	118:	126:	134:	142:	150:
	158:	166:	174:	183	191·	199·	207·	215·	223.	231·
	239·	247·	255·	263·	271:	279:	287:	295:	303:	311:
	319:	327:	335:	343:	351:	359:	367:	375:	383:	391:
	399:	407:	415:	423:	431:	439:	447:	455:	463:	471:
	479.	487.	495.	503.	511.	519.	527.	535,	543.	551.
	559.	567.	575.	583.	591.	599.	607.	615.	623.	631.
	639.	647.	655.	663.	671.	679	687	695	703	711
	719	727	735	743	751	759	766:	774.	782.	790.
	798.	806.	814.	822.	830	838	846	854	862	870
	878	885.	893.	901.	909.	917.	925.	933.	941	949
	957	965	973	980:	988.	996:	*004.	*012.	*020	*028
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	74	036	044	052	059:	067.	075.	083.	091:	099	107'
551		115	123	130:	138.	146.	154.	162	170	178	186
552		193.	201.	209.	217.	225	233	241	248:	256.	264.
553		272.	280	288	296	303:	311.	319.	327	335	343
554		350:	358.	366.	374	382	390	397:	405.	413.	421
555		429	437	444:	452.	460.	468	476	484	491'	499
556		507	515	523	530:	538.	546.	554	562	569:	577.
557		585.	593	601	608:	616.	624	632	640	647:	655.
558		663	671	678:	686.	694.	702	710	717:	725.	733
559		741	748:	756.	764	772	780	787:	795.	803	811
560		818:	826.	834	842	849:	857.	865	873	880:	888.
561		896	904	911:	919.	927	934:	942.	950	958	965:
562		973.	981	989	969:	*004.	*012	*019:	*027.	*035	*043
563	75	050:	058.	066	073:	081.	089	097	104:	112.	120
564		127:	135.	143	151	158:	166	174	181:	189	197
565		204:	212.	220	227:	235.	243	250:	258.	266	273:
566		281.	289	296:	304.	312	319:	327.	335	342:	350.
567		358	365:	373.	381	388:	396.	404	411:	419.	427'
568		434:	442	450	457:	465	473	480:	488	495:	503.
569		511	518:	526	534	541:	549	556:	564.	572	579:
570		587	595	602:	610	617:	625.	633	640:	648	656
571		663:	671	678:	686	694	701:	709	716:	724	732
572		739:	747	754:	762	769:	777.	785	792:	800	807:
573		815	823	830:	838	845:	853	860:	868	876	883:
574		891	898:	906	913:	921	929	936:	944	951:	959
575		966:	974	981:	989	996:	*004.	*012	*019:	*027	*034:
576	76	042	049:	057	064:	072	079:	087	094:	102.	110
577		117:	125	132:	140	117:	155	162:	170	177:	185
578		192:	200	207:	215	222:	230	237:	245	252:	260
579		267:	275	282:	290	297:	305	312:	320	327:	335
580		342:	350	357:	365	372:	380	387:	395	402:	410
581		417:	425	432:	440	447:	454:	462	469:	477	484:
582		492	499:	507	514:	522	529:	537	544:	551:	559
583		566:	574	581:	589	596:	604	611:	618:	626	633:
584		641.	648:	656	663:	671	678'	685:	693	700:	708
585		715:	723	730'	737:	745	752:	760	767:	774:	782
586		789:	797	804:	811:	819	826:	834	841:	849	856'
587		863:	871	878:	886	893'	900:	908	915:	922:	930
588		937:	945	952:	959:	967	974:	982	989'	996:	*004
589	77	011:	018:	026	033:	041	048'	055:	063	070'	077:
590		085	092:	099:	107	114:	121:	129	136:	144	151'
591		158:	166	173'	180:	188	195'	202:	210	217'	224:
592		232	239:	246:	254	261:	268:	276	283'	290:	298
593		305'	312:	320	327'	334:	342	349'	356:	364	371'
594		378:	385:	393	400:	407:	415	422'	429:	437	444'
595		451:	458:	466	473:	480:	488	495'	502:	510	517'
596		524:	531:	539	546'	553:	561	568'	575:	582:	590
597		597'	604:	611:	619	626:	633:	641	648'	655:	662:
598		670	677'	684:	691:	699	706'	713:	720:	728	735'
599		742:	749:	757	764'	771:	778:	786	793'	800:	807:
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
77	815	822.	829:	836,	844	851.	858,	865:	872:	880
	887.	894:	901:	909	916.	923:	930,	939	945.	952.
	959:	966:	974	931.	938.	995,	•002,	•010.	•017.	•024,
78	031:	038:	046	053.	060,	067,	074,	092	089.	0?6,
	103:	110:	118	125.	132.	139,	146,	153:	161	168.
	175:	182:	189:	197	204.	211.	218,	225:	232:	240
	247.	254.	261:	268,	275:	283	296.	297.	304:	311,
	318:	346	333.	340.	347.	354,	361,	369:	376	353.
	390.	397:	404:	411,	418,	426	433.	440.	447.	454,
	461:	468:	475:	483	490.	497.	504,	511:	518:	525,
	532:	540	547.	554.	561.	568,	575,	582:	539:	597
	604.	611.	618.	625.	632,	639,	646,	653,	660:	668
	675.	692.	689.	696.	703:	710,	717,	724,	731:	738,
	746	753.	760.	767.	774.	781.	769,	795,	802:	809,
	816:	823:	830,	833	845.	852.	859.	866.	873.	880.
	887:	894:	901,	908,	915,	922,	929,	936:	913:	951
	958.	965.	972.	979.	986.	993.	•000.	•007.	•014.	•021.
79	028:	035:	042:	049,	056:	063,	070,	077,	084:	091,
	098:	105:	112,	119,	126,	133,	140,	148	155.	162.
	169.	176	183.	190.	197.	204.	211.	218.	225.	232.
	239.	246.	253.	260.	267.	274	281	288	295	302
	309	316	323	330	337	344.	351	358	365	372
	379	386	393	399,	406.	413.	420.	427.	434.	441.
	448.	455.	462.	469.	476.	483.	490.	497.	504.	511
	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
	588	594:	601.	608.	615.	622.	629.	636.	643.	650
	657	664	671	678	685	692	699	705:	712.	719.
	726.	733.	740.	747.	754	761	768	775	782	789
	795:	802.	809.	816.	823.	830.	937	844	851	858
	865	871:	878.	885.	892.	899.	906	913	920	927
	934	940:	947.	954.	961.	968.	975	982	989	996
80	002:	009.	016.	023.	030	037	044	051	057,	064.
	071.	078.	085	092	099	106	112,	119.	126.	133.
	140	147	154	160:	167.	174.	181.	188	195	202
	208:	215.	222.	229	236	243	250	256:	263.	270.
	277	284	291	297,	304.	311.	318	325	332	338,
	345.	352.	359	366	373	379:	386.	393	400	407
	413:	420.	427.	434	441	448	454,	461	468	475
	482	488:	495.	502	509	516	522:	529.	536	543
	550	556:	563.	570	577	584	590:	597.	604	611
	617:	624.	631.	339	645	651:	658.	665	672	679
	685:	692.	699	706	712,	719.	726	733	739,	746.
	753.	760	767	773:	780.	787	794	800:	8?7.	814
	821	827:	834.	841	848	854,	861.	863	875	881,
	883.	895	902	908,	915.	922	929	935:	942.	949
	955:	962.	969	976	982:	989.	996	•003	•009:	•016.
81	023	029:	036.	043	050	056:	063.	070	077	083,
	090	097	103:	110.	117	123:	130.	137	144	150:
	157.	164	170:	177.	184	190:	197.	204	211	217,
	224	231	237:	244.	251	257,	264.	271	277,	284.
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81	291	298	304:	311	318	324:	331	338	344:	351
651		358	364:	371	378	384:	391	398	404:	411	418
652		424:	431	438	444:	451	458	464:	471	478	484:
653		491	497:	504.	511	517:	524.	531	537:	544	551
654		557:	564	571	577:	584	590:	597.	604	610:	617
655		624	630:	637	644	650:	657	663:	670.	677	683:
656		690	697	703:	710	716:	723	730	736:	743	749:
657		756.	763	769:	776	782:	789.	796	802:	809	815:
658		822.	829	835:	842	848:	855.	862	868:	875	881:
659		888.	895	901:	908	914:	921	928	934:	941	947:
660		954	960:	967.	974	980:	987	993:	*000	*007	*013:
661	82	020	026:	033	039:	046	052:	059.	066	072:	079
662		085:	092	098:	105	112	118:	125	131:	138	144:
663		151	157:	164	170:	177.	184	190:	197	203:	210
664		216:	223	229:	236	242:	249	256	262:	269	275:
665		[illegible]	288:	295	301:	308	314:	321	327:	334	340:
666		347	353:	360	366:	373	380	386:	393	399:	406
667		412:	419	425:	432	438:	445	451:	458	464:	471
668		477:	484	490:	497	503:	510	516:	523	529:	536
669		542:	549	555:	562	568:	575	581:	588	594:	600:
670		607	613:	620	626:	633	639:	646	652:	659	665:
671		672	678:	685	691:	698	704:	711	717:	723:	730
672		736:	743	749:	756	762:	769	775:	782	788:	795
673		801:	807:	814	820:	827	833:	840	846:	853	859:
674		865:	872	878:	885	891:	898	904:	911	917:	923:
675		930	936:	943	949:	956	962:	968:	975	981:	988
676		994:	*001	*007:	*013:	*020	*026:	*033	*039:	*046	*052·
677	83	058:	065	071:	078	084:	090:	097	103:	110	116:
678		122:	129	135:	142	148:	154:	161	167:	174	180:
679		186:	193	199:	206	212:	218:	225	231:	238	244:
680		250:	257	263:	270	276·	282:	289	295:	301:	308
681		314:	321	327·	333:	340	346:	352:	359	365:	372
682		37	384:	391	397:	403:	410	416:	422:	429	435:
683			448·	454:	461	467·	473:	480	486:	492:	499
684		505:	511:	518	524:	531	537·	543:	550	556·	562:
685		569	575·	581:	588	594·	600:	607	613·	619:	626
686		632·	638:	645	651·	657:	664	670·	676:	683	689·
687		695:	701:	708	714:	720:	727	733:	739:	746	752:
688		758:	765	771·	777:	784	790·	796:	803	809·	815:
689		821:	828	834:	840:	847	853·	859:	866	872·	878:
690		884:	891	897·	903:	910	916·	922:	928:	935	941:
691		947:	954	960·	966:	972:	979	985·	991:	998	*004·
692	84	010:	016:	023	029·	035:	041:	018	054:	060:	067
693		073·	079:	085:	092	098·	104:	110:	117	123·	129:
694		135:	142	148·	154:	160:	167	173·	179:	185:	192
695		198·	204:	210:	217	223·	229:	235:	242	248·	254:
696		260:	267:	273·	279:	285:	292	298·	304:	310:	317
697		323·	329:	335:	341:	348	354·	360:	366:	373	379·
698		385:	391:	397:	404	410·	416:	422:	429	435·	441:
699		447:	453:	460	466·	472:	478:	484:	491	497·	503:
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84	509:	516	522·	528·	534:	540:	547	553·	559·	565:
701		571:	577:	584	590·	596:	602:	609:	615	621·	627:
702		633:	639:	646	652·	658·	664:	670:	676:	683	689·
703		695:	701:	707:	714	720·	726·	732:	738:	744:	751
704		757·	763·	769:	775:	781:	788	794·	800·	806:	812:
705		818:	825	831·	837·	843:	849:	855:	862	868·	874·
706		880·	886:	892:	898:	905	911·	917·	923:	929:	935:
707		941:	948	954·	960·	966:	972:	978:	984:	991	997·
708	85	003·	009·	015:	021:	027:	033:	040	046:	052·	058·
709		064:	070:	076:	082:	089	095·	101·	107·	113:	119:
710		125:	131:	138	144·	150·	156·	162:	168:	174:	180:
711		186:	193	199·	205·	211·	217·	223:	229:	235:	241:
712		247:	254	260·	266·	272·	278·	284:	290:	296:	302:
713		308:	315	321·	327·	333·	339·	345·	351:	357:	363:
714		369:	375:	381:	388	394·	400·	406·	412·	418·	424:
715		430:	436:	442:	448:	454:	460:	467	473·	479·	485·
716		491·	497·	503·	509·	515:	521:	527:	533:	539:	545:
717		551:	557:	564	570·	576·	582·	588·	594·	600·	606·
718		612·	618·	624:	630:	636:	642:	648:	654:	660:	666:
719		672:	678:	684:	691	697·	703·	709·	715·	721·	727·
720		733·	739·	745·	751·	757·	763·	769·	775·	781·	787:
721		793:	799:	805:	811:	817:	823:	829:	835:	841:	847:
722		853:	859:	865:	871:	877:	883:	889:	895:	901:	907:
723		913:	919:	925:	931:	937:	943:	949:	955:	961:	967.
724		973.	979.	985.	991.	997.	•003.	•009.	•015.	•021.	•027.
725	86	033.	039.	045.	051.	057.	063.	069.	075.	081.	087.
726		093.	099.	105.	111.	117.	123.	129.	135.	141	147
727		153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
728		213	219	225	231	236:	242.	248.	254.	260.	266.
729		272.	278.	284.	290.	296.	302.	308	314	320	326
730		332	338	344	350	356	362	367.	373.	379.	385.
731		391.	397.	403.	409.	415	421	427	433	439	445
732		451	457	462:	468.	474.	480.	486.	492.	498.	504
733		510	516	522	528	534	540	545:	551.	557.	563.
734		569.	575.	581	587	593	599	605	611	616:	622.
735		628.	634.	640.	646	652	658	664	670	675:	681.
736		687.	693.	699.	705	711	717	723	729	734:	740.
737		746.	752.	758.	764	770	776	782	787.	793:	799.
738		805.	811.	817	823	829	835	840:	846.	852.	858.
739		864	870	876	882	887:	893.	899.	905.	911	917
740		923	929	934:	940.	946.	952.	958	964	970	975:
741		981.	987.	993.	999	•005	•011	•016:	•022.	•028.	•034.
742	87	040	046	052	057:	063.	069.	075	081	087	093
743		098:	104.	110.	116	122	128	133:	139.	145.	151
744		157	163	168:	174.	180.	186	192	198	203:	209.
745		215.	221	227	233	238:	244.	250.	256	262	268
746		273:	279.	285.	291	297	302:	308.	314.	320	326
747		332	337:	343.	349	355	361	366:	372.	378.	384
748		390	395:	401.	407.	413	419	424:	430.	436.	442
749		448	453:	459.	465.	471	477	482.	488.	494.	500
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	87	506	511:	517.	523	529	535	540:	546.	552	558
751		563:	569.	575.	581	587	592:	598.	604	610	616
752		621:	627.	633	639	644:	650.	656	662	667:	673.
753		679	685	691	696:	702.	708	714	719:	725.	731
754		737	742:	748.	754	760	765:	771.	777	783	789:
755		794.	800	806	811:	817.	823	829	834:	840.	846
756		852	857·	863.	869	875	880:	886.	892	898	903:
757		909.	915	921	926:	932.	938	943:	949.	955	961
758		966:	972.	978	984	989:	995.	•001	•007	•012:	•018
759	88	024	029:	035.	041	047	052:	058	064	069:	075.
760		081	087	092:	098	104	109:	115.	121	127	132:
761		138	144	149:	155.	161	166:	172.	178	184	189:
762		195	201	206:	212.	218	223:	229.	235	241	246:
763		252	258	263:	269.	275	280:	286.	292	297:	303.
764		309	315	320:	326	332	337:	343	349	354:	360
765		366	371:	377	383	388:	394.	400	405:	411.	417
766		422:	428.	434	439:	445.	451	456:	462.	468	473:
767		479.	485	490:	496.	502	507:	513	519	524:	530
768		536	541:	547	553	558:	564	570	575:	581	586:
769		592.	598	603:	609.	615	620:	626.	632	637:	643
770		649	654:	660	665:	671.	677.	682:	688.	694	699:
771		705	711	716:	722	727:	733.	739	744:	750	756
772		761:	767	772:	778.	784	789:	795	801	806:	812
773		817:	823.	829	834:	840	846	851:	857	862:	868
774		874	879:	885	890:	896.	902	907:	913	919:	924.
775		930	935:	941	946:	952.	958	963:	969	974:	980.
776		986	991:	997	•002:	•008.	•014	•019:	•025	•030:	•036.
777	89	042	047:	053	058:	064	070	075:	081	086:	092
778		097:	103.	109	114:	120	125:	131	137	142:	148
779		153:	159	164:	170	176	181:	187	192:	198	203:
780		209	215	220:	226	231:	237	242:	248	253:	259.
781		265	270:	276	281:	287	292:	298	304	309:	315
782		320:	326	331:	337	342:	348	353:	359.	365	370:
783		376	381:	387	392:	398	403:	409	414:	420.	426
784		431:	437	442·	448	453:	459	464:	470	475:	481
785		486:	492	498	503:	509	514:	520	525:	531	536:
786		542	547:	553	558:	564	569:	575	580:	586	591:
787		597	602:	608.	614	619:	625	630:	636	641:	647
788		652:	658	663:	669	674:	680	685:	691	696:	702
789		707:	713	718:	724	729:	735	740:	746	751:	757
790		762:	768	773:	779	784:	790	795:	801	806:	812
791		817:	823	828:	834	839:	845	850:	856	861:	867
792		872:	878	883·	888:	894	899:	905	910:	916	921:
793		927	932:	938	943:	949	954:	960	965:	971	976:
794		982	987:	992:	998	•003:	•009	•014:	•020	•025:	•031
795	90	036:	042	047:	053	058:	064	069·	074:	080	085:
796		091	096:	102	107:	113	118:	124	129·	134:	140
797		145:	151	156:	162	167:	173	178:	183:	189	194:
798		200	205:	211	216:	222	227·	232:	238	243:	249.
799		254:	260	265:	270:	276	281:	287	292:	298	303:
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	308:	314	319:	325	330:	336	341:	346:	352	357:
	363	368:	374	379:	384:	390	395:	401	406:	412
	417·	422:	428	433:	439	444:	449:	455·	460:	466
	471:	476:	482	487:	493	498:	503:	509	514:	520
	525:	531	536·	541:	547	552:	558	563·	568:	574
	579:	584:	590	595:	601	606:	611:	617	622:	628
	633:	638:	644	649:	655	660·	665·	671	676:	681:
	697	692:	698	703·	708:	714	719:	725	730·	735:
	741	746:	751:	757	762:	768	773·	778:	784	739·
	794:	800	805:	810:	816	821:	827	832·	837:	843
	848:	853:	839	864:	869:	875	880:	886	891·	896:
	902	907·	912:	918	923:	929:	934	939:	944:	950
	955:	960:	966	971:	976:	982	987:	993	998·	·003:
91	009	014·	019:	025	030·	035:	041	046·	051:	057
	062·	067:	073	078·	083:	089	094·	099:	105	110·
	115:	121	126·	131:	137	142·	147:	153	158·	163:
	169	174·	179:	184:	190	195:	200:	206	211:	216:
	222	227:	232:	238	243·	248:	254	259·	264:	270
	275·	280:	285:	291	296:	301:	307	312·	317:	323
	328·	333:	338:	344	349:	354:	360	365·	370:	376
	381·	386:	391:	397	402:	407:	413	418·	423:	429
	434·	439:	444:	450	455·	460:	466	471·	476:	481:
	487	492·	497:	503	508·	513:	518:	524	529·	534:
	539:	545	550:	555:	561	566·	571:	576:	582	587·
	592:	597	603	608:	613:	619	624·	629:	634:	640
	645·	650:	655:	661	666·	671:	676:	682	687·	692:
	698	703·	708:	713:	719	724·	729:	734:	740	745·
	750:	755:	761	766·	771:	776:	782	787·	792:	797:
	803	808·	813:	818:	824	829·	834·	839:	844:	850
	855·	860:	865:	871	876·	881:	886:	892	897·	902:
	907:	913	918·	923:	928:	933:	939	944·	949:	954:
	960	965·	970:	975:	981	986·	991·	996:	·001:	·007
92	012·	017:	022:	027:	033	038·	043:	048:	054	059·
	064:	069:	074:	080	085·	090:	095:	100:	106	111·
	116:	121:	127	132·	137·	142:	147:	153	158·	163·
	168:	173:	179	184·	189·	194:	199:	205	210·	215·
	220:	225:	231	236·	241·	246:	251:	256:	262	267·
	272:	277:	282:	288	293·	298·	303:	308:	314	319·
	324·	329:	334:	339:	345	350·	355·	360:	365:	371
	376·	381·	386:	391.	396:	402	407·	412·	417:	422:
	427:	433	438·	443·	448:	453:	458:	464	469·	474·
	479:	484:	489:	495	500·	505·	510:	515:	520:	526
	531·	536·	541:	546:	551:	556:	562	567	572·	577:
	582:	587:	593	598·	603·	608:	613:	619:	623:	629
	634·	639·	644:	649:	654:	659:	665	670·	675·	680:
	685:	690:	695:	701	706·	711·	716·	721:	726:	731:
	737	742·	747·	752·	757:	762:	767:	772:	778	783·
	788·	793·	798:	803:	808:	813:	819	824·	829·	834·
	839:	844:	849:	854:	860	865·	870·	875·	880:	885:
	890:	895:	900:	906	911·	916·	921·	926:	931:	936:
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	92	941:	947	952·	957·	962·	967·	972:	977:	982:	987:
851		992:	998	·003·	·008·	·013·	·018·	·023:	·028:	·033:	·038:
852	93	043:	049	054·	059·	064·	069·	074:	079:	084:	889:
853		094:	099:	105	110·	115·	120·	125·	130:	135:	140:
854		145:	150:	155:	161	166·	171·	176·	181·	186·	191·
855		196:	201:	206:	211:	216:	222	227·	232·	237·	242·
856		247·	252·	257:	262:	267:	272:	277:	282:	287:	293
857		298·	303·	308·	313·	318·	323·	328·	333:	338:	343:
858		348:	353:	358:	363:	368:	374	379·	384	389·	394
859		399·	404·	409·	414·	419:	424:	429:	434:	439:	444:
860		449:	454:	459:	464:	470	475·	480·	485·	490·	495·
861		500·	505·	510·	515·	520·	525:	530:	535:	540:	545:
862		550:	555:	560:	565·	570:	575:	580:	585:	591	596·
863		601·	606·	611·	616·	621·	626·	631·	636·	641·	646·
864		651·	656·	661·	666·	671·	676·	681:	686:	691:	696:
865		701:	706:	711:	716:	721:	726:	731:	736:	741:	746:
866		751:	756:	761:	766:	771:	776:	781:	786:	791:	796:
867		801:	806:	811:	816:	821:	826:	831:	836:	841:	846:
868		851:	856:	861:	866.	871:	876:	881:	886.	891.	896.
869		901.	906.	911.	916.	921.	926.	931.	936.	941.	946.
870		951.	956.	961.	966.	971.	976.	981.	986.	991.	996.
871	94	001.	006.	011.	016.	021.	026.	031.	036.	041.	046.
872		051.	056.	061.	066.	071.	076.	081.	086	091.	096.
873		101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874		151	156	161	166	171	175:	180.	185.	190.	195.
875		200.	205.	210.	215.	220.	225.	230.	235.	240	245
876		250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877		299:	304.	309.	314.	319.	324.	329.	334.	339.	344.
878		349	354	359	364	369	374	379	384	389	393:
879		398.	403.	408.	413.	418.	423.	428.	433	438	443
880		448	453	458	463	468	472:	477.	482.	487.	492:
881		497.	502.	507	512	517	522	527	532	537	541:
882		546.	551.	556.	561.	566.	571	576	581	586	591
883		596	600:	605.	610.	615.	620.	625.	630	635	640
884		645	650	655	659:	664.	669.	674.	679.	684.	689
885		694	699	704	709	713:	718.	723.	728.	733.	738
886		743	748	753	758	762:	767.	772.	777.	782.	787
887		792	797	802	807	811:	816.	821.	826.	831.	836
888		841	846	851	855:	860.	865.	870.	875.	880	885
889		890	895	899:	904.	909.	914.	919	924	929	934
890		939	943:	948.	953.	958.	963	968	973	978	982:
891		987.	992.	997.	·002	·007	·012	·017	·021:	·026.	·031.
892	95	036	041	046	051	055:	060.	065.	070.	075	080
893		085	090	094:	099.	104.	109	114	119	124	128:
894		133.	138.	143	148	153	158	162:	167.	172.	177
895		182	187	192	196:	201.	206.	211	216	221	225:
896		230.	235.	240	245	250	255	259:	264.	269.	274
897		279	284	288:	293.	298.	303	308	313	317:	322.
898		327.	332	337	342	346:	351.	356.	361	366	371
899		375:	380.	385.	390	395	400	404:	409.	414.	419
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
95	424	429	433;	438.	443.	448	453	458	462:	467.
	472	477	482	486:	491.	496.	501	506	511	515:
	520.	525	530	535	539.	544.	549.	554	559	563:
	568.	573.	578	583	588	592:	597.	602	607	612
	616:	621.	626	631	636	640:	645.	650	655	660
	664:	669.	674	679	684	688:	693.	698	703	708
	712:	717.	722	727	731:	736.	741.	746	751	755:
	760.	765.	770	775	779:	784.	789	794	799	803:
	808.	813	818	822:	827.	832	837	842	846:	851.
	856	861	865:	870.	875	880	885	889:	894.	899
	904	908:	913.	918	923	927:	932.	937.	942	947
	951.	956.	961	966	970:	975.	980	985	989:	994.
	999	*004	*009	*013:	*018.	*023	*028	*032:	*037.	*042
96	047	051:	056.	061	066	070:	075.	080	085	089:
	094.	099	104	108:	113.	118	123	127:	132.	137
	142	146:	151.	156	161	165:	170.	175	180	184:
	189.	194	199	203:	208.	213	217:	222.	227	232
	236:	241.	246	251	255:	260.	265	270	274:	279.
	284	288:	293.	298	303	307:	312.	317	322	326:
	331.	336	341	345:	350	355	359:	364.	369	374
	378:	383.	388	392:	397.	402	407	411:	416.	421
	425:	430.	435	440	444:	449.	454	458:	463.	468
	473	477:	482.	487	491:	496.	501	506	510:	515
	520	524:	529.	534	538:	543.	548	553	557:	562
	567	571:	576.	581	585:	590.	595	600	604:	609
	614	618:	623.	628	632:	637.	642	647	651.	656
	661	665:	670	675	679:	684.	689	693:	698.	703
	707:	712.	717	722	726:	731	736	740:	745	750
	754:	759	764	768:	773.	778	782:	787.	792	796:
	801.	806	810:	815.	820	824:	829.	834	838:	843.
	848	852:	857.	862	866:	871:	876	880:	885.	890
	894:	899.	904	908:	913.	918.	922:	927.	932	936:
	941.	946	950:	955.	960	964:	969.	974	978:	983.
	988	992:	997	*002	*006:	*011	*016	*020:	*025	*030
97	034:	039	043:	048.	053	057:	062.	067	071:	076.
	081	085:	090	095	099:	104	109	113:	118	122:
	127.	132	136:	141.	146	150:	155	160	164:	169
	173:	178:	183	187:	192	197	201:	206	211	215:
	220	224:	229.	234	238:	243	248	252:	257	261:
	266.	271	275:	280	285	289:	294	298:	303.	308
	312:	317	322	326:	331	335:	340	345	349:	354
	358:	363.	368	372:	377	382	386:	391	395:	400
	405	409:	414	418.	423.	428	432:	437	441:	446.
	451	455:	460	464:	469.	474	478:	483	487:	492.
	497	501:	506	510:	515.	520	524:	529	533:	538.
	543	547:	552	556:	561.	566	570:	575	579:	584.
	589	593:	598	602:	607	612	616:	621	625:	630
	634:	639.	644	648:	653	657:	662.	667	671:	676
	680:	685	699:	694.	699	703:	708	712:	717	722
	726:	731	735:	740	744:	749	754	758:	763	767:
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	97	772	776:	781.	786	790:	795	799:	804	808:	813
951		818	822:	827	831·	836	840:	845	850	854:	859
952		863:	868	872:	877	881:	986	891	895:	900	904:
953		909	913:	918	922:	927.	932	936:	941	945:	950
954		954:	959	963:	968	973	977:	982	986:	991	995:
955	98	000	004:	009	013:	018.	023	027:	032	036:	041.
956		045:	050	054:	059	063:	068	073	077:	082	086:
957		091	095:	100	104:	109	113:	118	122:	127	132
958		136:	141	145:	150	154:	159	163:	168	172:	177
959		181:	186	190:	195	199:	204.	209	213:	218	222:
960		227	231:	236	240:	245	249:	254	258:	263	267:
961		272	276:	281	285:	290	294:	299	303:	308	312:
962		317·	322	326:	331	335·	340	314:	349	353:	358
963		362:	367	371:	376	380:	385	389:	394	398:	403
964		407:	412	416:	421	425:	430	434:	439	443:	448
965		452:	457	461·	466	470:	475	479:	484	488.	493
966		497:	502	506:	511	515:	520	524:	529	533:	538
967		542:	547	551:	556	560:	565	569:	574	578:	583
968		587:	592	596:	600:	605	609:	614	618:	623	627:
969		632	636:	641	645:	650	654:	659	663:	668	672:
970		677	681:	686	690:	695	699:	704	708:	712:	717
971		721:	726	730:	735	739:	744	748:	753	757:	762
972		766:	771	775:	780	784·	788:	793	797:	802	806:
973		811	815:	820	824:	829	833:	838	842:	846:	851
974		855:	860	864:	869	873:	878	882:	887	891:	896
975		900·	904:	909	913:	918	922:	927	931:	936	940:
976		944·	949	953·	958	962:	967	971·	976	980:	985
977		989·	993:	998	·002:	·007	·011:	·016	·020:	·025	·029·
978	99	033:	038	042:	047	051:	056	060:	064:	069	073:
979		078	082:	087	091:	096	100·	104:	109	113:	118
980		122:	127	131·	135:	140	144:	149	153:	158	162·
981		166:	171	175:	180	184:	189	193·	197:	202	206:
982		211	215:	219:	224	228:	233	237:	242	246:	250:
983		255	259:	264	268:	273	277·	281:	286	290:	295
984		299:	303:	308	312:	317	321:	325:	330	334:	339
985		343:	348	352·	356:	361	365:	370	374·	378:	383
986		387:	392	396·	400:	405	409:	414	418:	422:	427
987		431:	436	440:	444·	449	453:	458	462:	466:	471
988		475:	480	484·	488:	493	497:	502	506·	510:	515
989		519:	524	528·	532:	537	541:	515:	550	554:	559
990		563:	567:	572	576:	581	585·	589.	594	598:	602:
991		607	611:	616	620:	624:	629	633:	638	642·	646:
992		651	655:	659:	664	668:	673	677·	681:	686	690:
993		694:	699	703:	708	712·	716:	721	725:	729:	734
994		738:	743	747·	751:	756	760·	761:	769	773:	777.
995		782	786:	791	795·	799:	804	808·	812:	817	821:
996		825:	830	834:	839	843·	847:	852	856·	860:	865
997		869:	873:	878	882:	886:	891	895:	899:	904	908:
998		913	917·	921:	926	930·	934:	939	943:	947:	952
999		956:	960:	965	969:	973:	978	982:	986:	991	995:
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

II.

Trigonometrische Tafeln.

0°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
1'	6,46372.	9,99999.	6,46372.	0,00029·	0,99999.	0,00029·	3437,74.	59
2	76475.	99999.	76475:	00058·	99999.	00058·	1718,87	58
3	94084:	99999.	94084:	00087·	99999.	00087.	1145,91.	57
4	7,06578.	99999.	7,06578.	00116·	99999.	00116.	859,436	56
5	16269.	99999.	16269:	00145·	99999.	00145·	687,548.	55
6	24187:	99999.	24187 :	00174.	99999.	00174.	572,957	54
7	30882	99999.	30882	00203:	99999.	00203:	491,106	53
8	36681 .	99999.	36691.	00232:	99999.	00232:	429,717.	52
9	41796:	99999.	41796:	00261:	99999.	00261:	381,970:	51
10	46372.	99999.	46372.	00290:	99999.	00290:	343,773.	50
11	50511:	99999.	50512	00319:	99999	00319:	312,521	49
12	54290.	99999.	54290.	00349	99999	00349	286,477.	48
13	57766:	99999.	57767	00378·	99999	00378·	264,440:	47
14	60985	99999.	60985.	00407·	99999	00407·	245,551:	46
15	63981.	99999.	63982	00436·	99999	00436·	229,181:	45
16	66784	99999.	66784.	00465·	99998.	00465·	214,857.	44
17	69417	99999	69417.	00494.	99998.	00494.	202,218:	43
18	71899.	99999	71900	00523:	99998.	00523:	190,984	42
19	74247:	99999	74248·	00552:	99998	00552:	180,932·	41
20	76475	99999	76476	00581:	99998	00581:	171,885·	40
21	78594	99999	78595	00610:	99998	00610:	163,700	39
22	80614.	99999	80615·	00639:	99997.	00639:	156,259	38
23	82645	99999	82546	00669	99997.	00669	149,465	37
24	84393	99998.	84394·	00698·	99997.	00698·	143,237·	36
25	86166	99998.	86167	00727·	99997	00727·	137,507·	35
26	87969.	99998.	87870.	00756·	99997	00756·	132,218.	34
27	89508:	99998.	89509:	00785·	99996.	00785·	127,321	33
28	91087:	99998.	91089	00814·	99996.	00814.	122,773.	32
29	92611.	99998	92613·	00843.	99996	00843:	118,540	31
30	94084	99998	94085.	00872:	99996	00872:	114,589.	30
31	95508	99998	95509:	00901:	99995.	00901:	110,892	29
32	96886.	99998	96988.	00930:	99995.	00930:	107,426·	28
33	98223	99997.	98225	00959:	99995	00959:	104,170.	27
34	99519.	99997.	99521.	00989	99995	00989	101,106.	26
35	8,00778.	99997.	8,00780.	01018·	99994.	01018·	98,2179	25
36	02002	99997.	02004	01047:	99994.	01047·	95,4894.	24
37	03191.	99997	03194·	01076·	99994	01076·	92,9084:	23
38	04350	99997	04352.	01105·	99993.	01105·	90,4633	22
39	05478·	99997	05480:	01134·	99993.	01134.	88,1435.	21
'	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	89°

0°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	8,06577.	9,99997	8,06580.	0,01163.	0,99993	0,01163:	85,9397.	[illegible]
41	07649:	99996.	07653	01192:	99992.	01192:	83,8435	[illegible]
42	08696	99996.	08699.	01221:	99992.	01221:	81,8470·	[illegible]
43	09718	99996.	09721:	01250:	99992	01250:	79,9434	[illegible]
44	10716.	99996	10720	01279:	99991.	01279:	78,1263·	[illegible]
45	11692.	99996	11696	01308:	99991	01309	76,3900	[illegible]
46	12647	99996	12650.	01338	99991	01339·	74,7291.	[illegible]
47	13581	99995.	13585	01367·	99990.	01367·	73,1389:	[illegible]
48	14495	99995.	14499.	01396·	99990	01396·	71,6150.	[illegible]
49	15390.	99995.	15395	01425·	99989.	01425·	70,1533	[illegible]
50	16268	99995	16272.	01454·	99989	01454.	68,7500.	[illegible]
51	17128	99995	17132:	01483·	99988.	01483:	67,4019.	[illegible]
52	17971·	99995	17976	01512.	99988.	01512:	66,1054·	[illegible]
53	18798·	99994.	18803.	01541:	99988	01541:	64,8560	[illegible]
54	19610	99994.	19615.	01570:	99987.	01570:	63,6567·	[illegible]
55	20407	99994	20412:	01599:	99987	01600	62,4991.	[illegible]
56	21189·	99994	21195	01628:	99986.	01629·	61,3829	[illegible]
57	21958	99994	21964	01657:	99986	01658·	60,3058·	[illegible]
58	22713·	99993.	22719.	01687	99985.	01687·	59,2658.	[illegible]
59	23455.	99993.	23462	01716·	99985	01716·	58,2611:	[illegible]
1°								
0′	8,24185.	9,99993	8,24192	0,01745·	0,99984.	0,01745.	57,2899.	[illegible]
1	24903	99993	24910·	01774·	99984	01774:	56,3505:	[illegible]
2	25609·	99992.	25616·	01803·	99983.	01803:	55,4415	[illegible]
3	26304	99992.	26311.	01832·	99983	01832:	54,5613	[illegible]
4	26988	99992	26995:	01861.	99982.	01861:	53,7065.	[illegible]
5	27661·	99992	27669	01890:	99982	01890:	52,8821	[illegible]
6	28324	99991.	28332·	01919:	99981.	01920	52,0806.	[illegible]
7	28977	99991.	28985.	01948:	99981	01949·	51,3031.	[illegible]
8	29620.	99991.	29629	01977:	99980·	01978·	50,5485	[illegible]
9	30254.	99991	30263·	02006:	99979.	02007·	49,8157·	[illegible]
10	30879	99990.	30888·	02036	99979	02036·	49,1038.	[illegible]
11	31495	99990.	31504.	02065·	99978.	02065.	48,4120:	[illegible]
12	32102.	99990	32112	02094·	99978	02094:	47,7395	[illegible]
13	32701.	99990	32711·	02123·	99977·	02123:	47,0853·	[illegible]
14	33292	99989.	33302·	02152·	99976.	02152:	46,4495.	[illegible]
15	33875	99989.	33885.	02181·	99976	02182	45,8293.	[illegible]
16	34450·	99989	34461	02210.	99975.	02211·	45,2261	[illegible]
17	35018	99989	35028.	02239:	99974:	02240·	44,6385.	[illegible]
18	35578·	99988.	35589.	02268:	99974	02269·	44,0661	[illegible]
19	36131	99988.	36142:	02297:	99973.	02298·	43,5081	[illegible]
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	

1°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	8,36677.	9,99988	8,36689	0,02326:	0,99972:	0,02327.	42,9610.	40
21	37217	99987.	37229	02355:	99972	02356:	42,4334.	39
22	37749.	99987.	37762·	02385	99971.	02385:	41,9157:	38
23	38276	99987	38288.	02414·	99970:	02414:	41,4105.	37
24	38796·	99987	38809	02443·	99970	02443:	40,9174	36
25	39310	99986.	39323·	02472·	99969·	02473	40,4358·	35
26	39817.	99986	39831.	02501·	99968.	02502·	39,9654.	34
27	40319.	99986	40333:	02530·	99967:	02531·	39,5058:	33
28	40816	99985.	40830	02559.	99967	02560·	39,0567.	32
29	41306.	99985	41321	02588:	99966·	02589·	38,6177	31
30	41791:	99985	41806.	02617:	99965.	02618.	38,1884.	30
31	42271.	99984.	42286:	02646:	99964:	02647:	37,7686	29
32	42746	99984	42761.	02675:	99964	02676:	37,3578.	28
33	43215.	99984	43231.	02704:	99963·	02705:	36,9560	27
34	43679:	99983.	43696	02734	99962.	02735	36,5626:	26
35	44139	99983	44156	02763·	99961:	02764·	36,1775:	25
36	44594	99983	44611	02792·	99961	02793·	35,8005.	24
37	45044	99982.	45061	02821·	99960·	02822·	35,4312:	23
38	45489·	99982	45506.	02850·	99959·	02851·	35,0695	22
39	45930	99981.	45948	02879·	99958.	02880.	34,7151	21
40	46366·	99981.	46384.	02908·	99957:	02909:	34,3677.	20
41	46798.	99981	46817	02937.	99956:	02938:	34,0273	19
42	47226	99980.	47245·	02966:	99955:	02967:	33,6935	18
43	47649.	99980.	47669	02995:	99955	02997	33,3661.	17
44	48069	99980	48089	03024:	99954·	03026·	33,0451.	16
45	48484.	99979.	48505	03053:	99953·	03055·	32,7302.	15
46	48896	99979	48916.	03082:	99952·	03084·	32,4212:	14
47	49303.	99978.	49325	03112	99951.	03113.	32,1180:	13
48	49707.	99978.	49729	03141·	99950:	03142:	31,8205	12
49	50107:	99978	50129.	03170·	99949:	03171:	31,5283.	11
50	50504	99977.	50526.	03199·	99948:	03200:	31,2415.	10
51	50897	99977	50920	03228·	99947:	03229:	30,9599	9
52	51286.	99976.	51309.	03257·	99946:	03259	30,6833	8
53	51672.	99976.	51696	03286·	99945:	03288·	30,4115.	7
54	52055	99976	52079	03315.	99945	03317·	30,1446	6
55	52434·	99975.	52458.	03344:	99944·	03346·	29,8822.	5
56	52810	99975	52834:	03373:	99943·	03375.	29,6214.	4
57	53182.	99974.	53207:	03402:	99942·	03404:	29,3711	3
58	53552	99974	53577.	03431:	99941·	03433:	29,1220	2
59	53918.	99973.	53944.	03460:	99940	03462:	28,8770.	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang	88°

2°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	8,54281:	9,99973.	8,54308	0,03489:	0,99939	0,03492	28,6362.	60
1	54642	99973	54669	03519	99938	03521˙	28,3993:	59
2	54999˙	99972.	55026.	03548˙	99937	03550˙	28,1664	58
3	55353.	99972	55381.	03577˙	99935.	03579˙	27,9372˙	57
4	55705	99971.	55733.	03606˙	99934.	03608.	27,7117˙	56
5	56054	99971	56082:	03635˙	99933.	03637:	27,4898.	55
6	56399.	99970.	56429	03664˙	99932.	03666:	27,2714:	54
7	56743	99970	56772.	03693˙	99931.	03695:	27,0565.	53
8	57083.	99969:	57113.	03722.	99930.	03725	26,8449:	52
9	57421	99969	57451:	03751:	99929.	03754˙	26,6366:	51
10	57756.	99968.	57787.	03780:	99928.	03783˙	26,4315:	50
11	58089	99968	58120:	03809:	99927	03812˙	26,2296	49
12	58419˙	99967.	58451	03838:	99926	03841.	26,0307	48
13	58746.	99967	58779˙	03867:	99925	03870:	25,8348	47
14	59072	99966.	59105	03896:	99924	03899:	25,6418˙	46
15	59394.	99966.	59428˙	03925:	99922.	03929	25,4516.	45
16	59715	99966	59749	03955	99921.	03958˙	25,2643.	44
17	60033	99965.	60067.	03984˙	99920.	03987˙	25,0797.	43
18	60348.	99964.	60383:	04013˙	99919	04016˙	24,8978	42
19	60662	99964	60697.	04042˙	99918	04045.	24,7185	41
20	60973˙	99963.	61009	04071˙	99917	04074:	24,5417.	40
21	61282	99963	61318.	04100˙	99915.	04103:	24,3675	39
22	61589	99962.	61626	04129˙	99914.	04132:	24,1957˙	38
23	61893.	99962	61931˙	04158.	99913	04162	24,0263˙	37
24	62196	99961.	62234	04187:	99912	04191˙	23,8592.	36
25	62496.	99961	62535	04216:	99911	04220˙	23,6945	35
26	62794:	99960.	62834	04245:	99909.	04249.	23,5320.	34
27	63091	99960	63130.	04274:	99908.	04278:	23,3717:	33
28	63385˙	99959.	63425.	04303:	99907	04307:	23,2136.	32
29	63677.	99959	63718	04332:	99906	04336:	23,0576:	31
30	63967:	99958.	64009	04361:	99904.	04366	22,9037.	30
31	64256	99958	64298	04390:	99903.	04395˙	22,7518:	29
32	64542.	99957.	64585˙	04420	99902	04424˙	22,6020	28
33	64827	99956:	64870˙	04449˙	99900.	04453.	22,4540.	27
34	65110	99956	65153.	04478˙	99899.	04482:	22,3080:	26
35	65391	99955.	65435	04507˙	99898	04511:	22,1639.	25
36	65670˙	99955	65714.	04536˙	99897	04540:	22,0217	24
37	65947˙	99954.	65992.	04565˙	99895.	04570	21,8812.	23
38	66223	99954	66268.	04594˙	99894	04599˙	21,7425:	22
39	66496.	99953.	66543	04623˙	99893	04628˙	21,6056	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	87°

2°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
10′	8,66768:	9,99952:	8,66815.	0,04652.	0,99891.	0,04657.	21,4704	20
11	67039	99952	67086.	04681:	99890	04686:	21,3368.	19
12	67308	99951.	67356	04710:	99888.	04715:	21,2049	18
13	67575·	99951	67623.	04739:	99887.	04745	21,0746.	17
14	67840.	99950.	67889:	04768:	99886	04774·	20,9459:	16
15	68104	99949:	68154	04797:	99884.	04803·	20,8188	15
16	68366.	99949	68417	04826:	99883	04832.	20,6932	14
17	68627	99948.	68678·	04855:	99882	04861:	20,5691	13
18	68886·	99948	68938	04884:	99880.	04890:	20,4464.	12
19	69143.	99947.	69196·	04914	99879	04919:	20,3253	11
50	69399:	99946:	69452.	04943·	99877.	04949	20,2055.	10
51	69654	99946	69708	04972·	99876	04978·	20,0871:	9
52	69907.	99945.	69961.	05001·	99874.	05007·	19,9702	8
53	70158.	99944:	70213:	05030·	99873	05036.	19,8545.	7
54	70408:	99944	70464.	05059·	99871.	05065:	19,7402.	6
55	70657.	99943.	70713:	05088·	99870	05094:	19,6272.	5
56	70904:	99943	70961.	05117·	99868.	05124	19,5155.	4
57	71150.	99942·	71208	05146·	99867	05153·	19,4051	3
58	71395	99941.	71453·	05175·	99865.	05182·	19,2959	2
59	71638·	99941	71697	05204.	99864	05211.	19,1879·	1
3°								87°
0′	8,71880	9,99940·	8,71939.	0,05233:	0,99862.	0,05240:	19,0811·	60′
1	72120·	99939.	72180:	05262:	99861	05269:	18,9755	59
2	72359·	99939	72420	05291:	99859.	05299	18,8710.	58
3	72597	99938·	72658.	05320:	99858	05328·	18,7677.	57
4	72833.	99937.	72895:	05349:	99856.	05357·	18,6655:	56
5	73068:	99937	73131.	05378:	99855	05386.	18,5644:	55
6	73302.	99936·	73366	05407:	99853.	05415:	18,4644.	54
7	73535	99935.	73599.	05436:	99852	05444:	18,3655	53
8	73766.	99935	73831.	05465:	99850.	05474	18,2676.	52
9	73996:	99934·	74062.	05495	99848:	05503·	18,1708	51
10	74225.	99933.	74292	05524·	99847	05532.	18,0749.	50
11	74453.	99932:	74520.	05553·	99845.	05561:	17,9801	49
12	74680	99932	74747:	05582·	99844	05590:	17,8863	48
13	74905.	99931.	74974	05611·	99842·	05620	17,7934·	47
14	75129:	99930:	75198.	05640·	99840.	05649·	17,7015	46
15	75352:	99930	75422.	05669·	99839	05678·	17,6105.	45
16	75574.	99929	75645	05698·	99837.	05707.	17,5205	44
17	75795	99928.	75866.	05727·	99835:	05736:	17,4313.	43
18	76015	99927:	76087	05756·	99834	05765:	17,3431.	42
19	76233.	99927	76306·	05785·	99832.	05795	17,2558	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	86°

3°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	8,76451	9,99926·	8,76524.	0,05814·	0,99830:	0,05824·	17,1693·	40
21	76667·	99925.	76741:	05843.	99829	05853.	17,0837	39
22	76882.	99924:	76957:	05872:	99827·	05882:	16,9989.	38
23	77096:	99924	77172.	05901:	99825.	05911:	16,9150	37
24	77310	99923·	77386.	05930:	99823:	05941	16,8319	36
25	77522·	99922.	77599.	05959:	99822	05970·	16,7496	35
26	77733·	99921:	77811	05988:	99820.	05999·	16,6681	34
27	77943·	99921	78022	06017:	99818:	06028.	16,5873.	33
28	78154·	99920·	78231.	06046:	99817	06057:	16,5074.	32
29	78360·	99919.	78440.	06075:	99815·	06087	16,4282.	31
30	78567.	99918:	78648.	06104:	99813·	06116·	16,3498.	30
31	78773:	99918	78855	06133:	99811.	06145·	16,2721:	29
32	78978:	99917·	79061	06162:	99809:	06174.	16,1952	28
33	79182:	99916.	79266	06191:	99808.	06203:	16,1189.	27
34	79385:	99915:	79470	06220:	99806·	06233	16,0434.	26
35	79588	99915	79673	06250	99804·	06262·	15,9686.	25
36	79789·	99914·	79875·	06279·	99802.	06291·	15,8945	24
37	79989.	99913·	80076·	06308·	99800:	06320.	15,8211	23
38	80189	99912.	80276.	06337·	99799	06349:	15,7483·	22
39	80387.	99911:	80475:	06366·	99797·	06379	15,6762	21
40	80585	99911	80674	06395·	99795·	06408·	15,6047.	20
41	80781.	99910·	80871.	06124·	99793·	06437.	15,5339.	19
42	80977.	99909·	81068	06453·	99791.	06466:	15,4638	18
43	81172.	99908.	81264	06482·	99789:	06495:	15,3942.	17
44	81366.	99907:	81458.	06511·	99787:	06525	15,3253.	16
45	81559:	99906:	81652.	06540·	99785:	06554·	15,2570.	15
46	81752	99906	81846	06569·	99783:	06583.	15,1893	14
47	81943.	99905·	82038·	06598·	99782	06612:	15,1222	13
48	82134	99904·	82229.	06627·	99780·	06641:	15,0557	12
49	82324	99903.	82420	06656·	99778·	06671	14,9897.	11
50	82512.	99902:	82610	06685·	99776·	06700·	14,9244	10
51	82701	99901:	82799	06714·	99774·	06729.	14,8596	9
52	82888·	99901	82987·	06743·	99772·	06758:	14,7953.	8
53	83074.	99900·	83174.	06772.	99770·	06788	14,7316:	7
54	83260.	99899·	83361	06801:	99768·	06817·	14,6685	6
55	83445.	99898·	83547	06830:	99766·	06846.	14,6059	5
56	83629:	99897.	83732	06859:	99764	06875:	14,5438·	4
57	83813	99896:	83916	06888:	99762	06904:	14,4822.	3
58	83995.	99895:	84099.	06917:	99760	06934	14,4212	2
59	84177	99894:	84282	06946:	99758	06963·	14,3606.	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	86°

4°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	8,84358·	9,99894	8,84464	0,06975:	0,99756	0,06992.	14,3006.	60
1	84538.	99893·	84645.	07004:	99754	07021:	14,2411	59
2	84718	99892·	84825:	07033:	99752	07051	14,1820.	58
3	84897	99891·	85005.	07062:	99750	07080·	14,1235	57
4	85075·	99890.	85184.	07091:	99748	07109.	14,0654.	56
5	85252·	99889:	85362:	07120:	99746	07138:	14,0078.	55
6	85429	99888:	85540.	07149:	99744	07168	13,9507	54
7	85604.	99887:	85717	07178:	99741.	07197·	13,8940·	53
8	85780	99886:	85893·	07207:	99739.	07226.	14,8378	52
9	85954.	99885:	86068.	07236:	99737.	07255:	13,7820.	51
10	86128	99885	86243	07265:	99735.	07285	13,7267	50
11	86301·	99884·	86417	07294:	99733.	07314·	13,6718.	49
12	86473.	99883·	86590.	07323:	99731	07343.	13,6174	48
13	86645	99882·	86763	07352:	99729	07372:	13,5633.	47
14	86816·	99881·	86935	07381:	99727	07402	13,5097:	46
15	86986..	99880·	87106	07410:	99725	07431·	13,4566	45
16	87156	99879·	87276.	07439:	99722.	07460.	13,4039.	44
17	87325·	99878.	87446.	07468:	99720.	07489:	13,3515	43
18	87493.	99877:	87616	07497.	99718.	07519	13,2995.	42
19	87661	99876:	87784.	07526:	99716	07548·	13,2480	41
20	87828.	99875:	87952.	07555:	99714	07577.	13,1968.	40
21	87994:	99874:	88120	07584:	99711.	07606:	13,1461	39
22	88160.	99873:	88286.	07613:	99709.	07636	13,0957.	38
23	88325:	99872:	88453	07642.	99707.	07665·	13,0457:	37
24	88490	99871:	88618	07671.	99705	07694.	12,9961.	36
25	88654	99870:	88783	07700:	99703	07723:	12,9469	35
26	88817·	99869:	88947.	07729.	99700.	07753	12,8980.	34
27	88980	99868:	89111	07758.	99698.	07782·	12,8495.	33
28	89142·	99867:	89274·	07787.	99696	07811.	12,8014	32
29	89303.	99866:	89436.	07816.	99694	07840:	12,7536·	31
30	89464	99865.	89598	07845.	99691.	07870	12,7062	30
31	89624.	99864:	89759.	07874.	99689	07899·	12,6591·	29
32	89784	99863.	89920	07903.	99687	07928.	12,6123.	28
33	89943·	99862.	90080·	07932.	99684.	07957:	12,5659:	27
34	90101.	99861.	90239.	07961.	99682.	07987	12,5199	26
35	90259.	99860.	90398.	07990.	99680	08016.	12,4742	25
36	90416:	99859.	90556:	08019.	99677.	08045:	12,4288·	24
37	90573.	99858.	90714.	08048.	99675.	08075	12,3837.	23
38	90729:	99857.	90871:	08077.	99673	08104·	12,3390	22
39	90885	99856.	91028.	08106.	99670.	08133.	12,2946	21
′	L Cos.	L. Sin.	L Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	85°

4°	L. Sin.	L. Cos	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	8,91040·	9,99855.	8,91184:	0,08135.	0,99668	0,08162:	12,2505	20
41	91194.	99854.	91340	08164.	99666	08192	12,2067·	19
42	91348.	99853.	91495	08193.	99663.	08221·	12,1632·	18
43	01502	99852.	91649.	08222.	99661	08250.	12,1200.	17
44	91655	99851.	91803	08251.	99658.	08280	12,0771:	16
45	91807·	99850.	91956.	08280.	99656.	08309·	12,0346	15
46	01959	99849.	92109.	08309.	99654	08338.	11,9923·	14
47	92110·	99848	92261:	08338.	99651.	08367:	11,9503.	13
48	92261	99847	92413.	08367.	99649	08397	11,9086:	12
49	92411·	99846	92564:	08396.	99646.	08426.	11,8672.	11
50	92560.	99845	92715.	08425.	99644	08455:	11,8261.	10
51	92710	99844	92865:	08454.	99641.	08485	11,7853	9
52	92858.	99843	93015·	08483.	99639	08514·	11,7447.	8
53	93006:	99842	93164.	08512.	99637	08543.	11,7045	7
54	93154	99840.	93313	08541.	99634.	08573	11,6644.	6
55	93301	99839.	93461.	08570.	99632	08602·	11,6247.	5
56	93448	99838.	93609	08599.	99629.	08631.	11,5852:	4
57	93594·	99837.	93756	08628.	99627	08660:	11,5460.	3
58	93739.	99836.	93903	08657.	99624.	08690	11,5071.	2
59	93884:	99835.	94049·	08686.	99622	08719.	11,4684:	1
5°								85°
0′	8,94029.	9,99834	8,94195	0,08715.	0,99619	0,08748:	11,4300.	60′
1	94173:	99833	94340·	08744.	99616.	08778	11,3918:	59
2	94317	99832	94485	08773.	99614	08807·	11,3539.	58
3	94460.	99831	94629·	08802.	99611·	08836·	11,3163	57
4	94603	99829·	94773	08831	99609	08866	11,2788.	56
5	94745.	99828·	94916·	08860	99606.	08895·	11,2417	55
6	94887	99827·	95059·	08889	99604	08924·	11,2047.	54
7	95028.	99826·	95202	08918	99601.	08954	11,1680:	53
8	95169.	99825	95344	08947	99598:	08983·	11,1316	52
9	95309:	99824	95485·	08976	99596	09012.	11,0954	51
10	95449.	99823	95626:	09005	99593.	09042	11,0594·	50
11	95589	99822	95767	09034	99591	09071·	11,0236·	49
12	95728·	99820.	95907·	09063	99588·	09100.	10,9881	48
13	95867	99819·	96047	09092	99585.	09130	10,9528.	47
14	96005·	99818·	96186·	09121	99583	09159·	10,9177:	46
15	96142.	99817	96325	09150	99580·	09188.	10,8829	45
16	96280	99816	96463·	09179	99577.	09218	10,8482.	44
17	96416·	99815	96601·	09208	99575	09247·	10,8138.	43
18	96553	99813.	96739	09237	99572·	09276.	10,7796:	42
19	96689	99812.	96876·	09266	99569.	09306	10,7456.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	84°

5°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	8,96824.	9,99811.	8,97013	0,09294.	0,99567	0,09335·	10,7119	40
21	96959:	99810	97149.	09323.	99564·	09364.	10,6783·	39
22	97094.	99809	97285	09352.	99561.	09394	10,6449.	38
23	97228:	99808	97420.	09381.	99558:	09423·	10,6118	37
24	97362.	99806.	97555:	09410.	99556	09452.	10,5788.	36
25	97496	99805·	97690.	09439.	99553·	09482	10,5461.	35
26	97629·	99804	97824:	09468.	99550.	09511·	10,5136	34
27	97761.	99803	97958.	09497.	99547:	09540.	10,4812.	33
28	97894	99802	98092	09526.	99545	09570	10,4491	32
29	98025.	99800.	98225	09555.	99542·	09599.	10,4171.	31
30	98157	99799.	98357.	09584.	99539.	09628:	10,3853:	30
31	98288	99798	98489:	09613.	99536:	09658	10,3533	29
32	98418.	99797	98621.	09642	99534	09687.	10,3224·	28
33	98549	99795.	98753	09671	99531.	09716:	10,2912.	27
34	98678.	99794.	98884·	09700	99528·	09746	10,2602	26
35	98808	99793	99014.	09729	99525.	09775.	10,2294	25
36	98937·	99792	99145	09758	99522:	09805	10,1987.	24
37	99066	99790.	99275	09787	99519:	09834·	10,1683	23
38	99194·	99789.	99404.	09816	99517	09863.	10,1380.	22
39	99322	99788	99533:	09845	99514·	09893	10,1079.	21
40	99449.	99787	99662	09874	99511·	09922.	10,0780	20
41	99576:	99785.	99790.	09903	99508·	09951:	10,0482.	19
42	99703.	99784.	99918:	09931.	99505.	09981	10,0187	18
43	99829:	99783	9,00046	09960.	99502:	10010.	9,98930.	17
44	99955:	99782	00173.	09989.	99499:	10040	9,96007	16
45	9,00081.	99780.	00300.	10018.	99496:	10069·	9,93100.	15
46	00206.	99779.	00427	10047.	99493:	10098.	9,90211	14
47	00331.	99778	00553·	10076.	99491	10128	9,87338	13
48	00456	99777	00679	10105.	99488·	10157.	9,84481.	12
49	00580.	99775.	00804.	10134.	99485·	10187	9,81641	11
50	00704	99774.	00929:	10163.	99482·	10216·	9,78817	10
51	00827.	99773	01054.	10192	99479·	10245.	9,76009	9
52	00950:	99771.	01179	10221	99476·	10275	9,73217	8
53	01073.	99770.	01303·	10250	99473·	10304.	9,70440.	7
54	01196	99769	01426.	10279	99470·	10333:	9,67679:	6
55	01318·	99768	01550	10308	99467·	10363	9,64934.	5
56	01439·	99766.	01673	10337	99464	10392.	9,62204:	4
57	01561	99765	01795.	10366	99461	10422	9,59490	3
58	01682·	99764	01918	10394.	99458	10451.	9,56790.	2
59	01803	99762.	02040·	10423.	99455	10481	9,54106	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	84°

6°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,01923	9,99761	9,02162	0,10452	0,99452	0,10510	9,51436	60
1	02043	99760	02283	10487	99449	10539	9,48781	59
2	02163	99758	02404	10510	99446	10569	9,46141	58
3	02282	99757	02525	10539	99443	10598	9,43515	57
4	02401	99756	02645	10568	99439	10628	9,40903	56
5	02520	99754	02765	10597	99436	10657	9,38306	55
6	02638	99753	02885	10626	99433	10686	9,35723	54
7	02756	99752	03004	10655	99430	10716	9,33154	53
8	02874	99750	03123	10684	99427	10745	9,30599	52
9	02991	99749	03242	10713	99424	10775	9,28058	51
10	03108	99747	03360	10742	99421	10804	9,25530	50
11	03225	99746	03479	10771	99418	10834	9,23016	49
12	03342	99745	03596	10799	99415	10863	9,20515	48
13	03458	99743	03714	10828	99411	10892	9,18028	47
14	03574	99742	03831	10857	99408	10922	9,15554	46
15	03689	99741	03948	10886	99405	10951	9,13093	45
16	03804	99739	04065	10915	99402	10981	9,10645	44
17	03919	99738	04181	10944	99399	11010	9,08210	43
18	04034	99736	04297	10973	99396	11040	9,05788	42
19	04148	99735	04412	11002	99392	11069	9,03379	41
20	04262	99734	04528	11031	99389	11098	9,00982	40
21	04376	99732	04643	11060	99386	11128	8,98598	39
22	04489	99731	04758	11059	99383	11157	8,96226	38
23	04602	99729	04872	11117	99380	11187	8,93867	37
24	04715	99728	04986	11146	99376	11216	8,91520	36
25	04827	99727	05100	11175	99373	11246	8,89185	35
26	04940	99725	05214	11204	99370	11275	8,86862	34
27	05051	99724	05327	11233	99367	11305	8,84551	33
28	05163	99722	05440	11262	99363	11334	8,82251	32
29	05274	99721	05553	11291	99360	11364	8,79964	31
30	05385	99719	05665	11320	99357	11393	8,77688	30
31	05496	99718	05778	11349	99353	11423	8,75424	29
32	05607	99717	05890	11378	99350	11452	8,73171	28
33	05717	99715	06001	11407	99347	11481	8,70930	27
34	05827	99714	06112	11435	99343	11511	8,68700	26
35	05936	99712	06224	11464	99340	11540	8,66482	25
36	06046	99711	06334	11493	99337	11570	8,64274	24
37	06155	99709	06445	11522	99333	11599	8,62078	23
38	06263	99708	06555	11551	99330	11629	8,59892	22
39	06372	99706	06665	11580	99327	11658	8,57718	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	83°

6°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang.	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,06480.	9,99705	9,06775	0,11609	0,99323.	0,11698	8,55554.	20
41	06588.	99703.	06884.	11638	99320	11717.	53401:	19
42	06696	99702	06993:	11667	99317	11747	51259	18
43	06803.	99700.	07102.	11695.	99313.	11776.	49127.	17
44	06910:	99699	07211	11724.	99310	11806	47006.	16
45	07017.	99697.	07319.	11753	99306.	11835.	44895:	15
46	07124	99696	07427:	11782.	99303	11865	42795	14
47	07230.	99694.	07535.	11811.	99299.	11894.	40705	13
48	07336:	99693	07643	11840	99296.	11924	38625	12
49	07442	99691.	07750.	11869	99293	11953.	36555	11
50	07547.	99690	07857:	11898	99289.	11983	34495.	10
51	07653	99688.	07964	11927	99286	12012.	32445:	9
52	07758	99687	08070.	11955.	99282.	12042	30405:	8
53	07863	99685.	08177	11984.	99279	12071.	28375.	7
54	07967.	99684	08283	12013.	99275.	12101	26355	6
55	08071:	99682.	08389	12042.	99272	12130.	24344.	5
56	08175:	99681	08494.	12071	99268.	12160	22343.	4
57	08279.	99679.	08599:	12100	99265	12189.	20352	3
58	08383	99678	08705	12129	99261.	12219	18370	2
59	08486	99676.	08809.	12158	99258	12248.	16397.	1
7°								83°
0′	9,08589	9,99675	9,08914	0,12186.	0,99254.	0,12278	8,14434.	60′
1	08692	99673.	09018.	12215.	99251	12307.	12480.	59
2	08794.	99671:	09122:	12244.	99247.	12337.	10535.	58
3	08897	99670	09226.	12273.	99243:	12367	08600	57
4	08999	99668.	09330	12302	99240	12396.	06673.	56
5	09100.	99667	09433.	12331	99236.	12426	04756	55
6	09202	99665.	09536:	12360	99233	12455.	02847.	54
7	09303.	99664	09639.	12389	99229.	12485	00948	53
8	09404:	99662.	09742	12417.	99225:	12514.	7,99057.	52
9	09505.	99660:	09844.	12446.	99222	12544	97175.	51
10	09606	99659	09946:	12475.	99218.	12573.	95302	50
11	09706.	99657.	10048.	12504	99215	12603	93437.	49
12	09806:	99656	10150	12533	99211	12632.	91581.	48
13	09906:	99654.	10251.	12562	99207.	12662	89733:	47
14	10006	99652:	10353	12591	99204	12692	87894.	46
15	10105.	99651	10454	12619.	99200	12721.	86061	45
16	10204:	99649.	10554.	12648:	99196.	12751	84241.	44
17	10303.	99648	10655.	12677.	99193	12780.	82427.	43
18	10402	99646.	10755:	12706	99189	12810	80622	42
19	10500.	99644:	10856	12735	99185.	12839.	78624.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	82°

7°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
20'	9,10599	9,99643	9,10955.	0,12764	0,99182	0,12869	7,77035	40
21	10697·	99641.	11055.	12793	99178·	12899	75253.	39
22	10795	99640	11155	12821.	99174.	12928.	73480	38
23	10892.	99639·	11254·	12850.	99170:	12958	71714.	37
24	10990	99636.	11353·	12879.	99167	12987.	69957	36
25	11087·	99635	11452	12908	99163·	13017	68207.	35
26	11184	99633·	11550.	12937	99159.	13046.	66465:	34
27	11280.	99631.	11649	12966	99155:	13076	64731.	33
28	11377	99630	11747·	12994.	99152	13106	63005	32
29	11473.	99628.	11845	13023.	99148·	13135.	61286.	31
30	11569:	99626:	11942.	13052.	99144·	13165	59575	30
31	11665.	99625	12040	13081	99140.	13194.	57871.	29
32	11761	99623.	12137.	13110	99136:	13224	56175.	28
33	11856.	99621:	12234:	13139	99133	13254	54486:	27
34	11951:	99620	12331.	13167.	99129·	13283.	52805.	26
35	12046.	99618·	12428	13196.	99125·	13313	51131:	25
36	12141.	99616.	12524.	13225.	99121.	13342.	49465	24
37	12236	99615	12621	13254	99117:	13372	47805.	23
38	12330.	99613·	12717·	13283	99113:	13402	46153.	22
39	12424:	99611.	12813	13312	99109:	13431.	44508.	21
40	12518.	99610	12908.	13340.	99106	13461	42870:	20
41	12612	99608·	13004	13369.	99102·	13490.	41239:	19
42	12706	99606.	13099·	13398.	99098·	13520.	39615:	18
43	12799·	99604:	13194·	13427	99094·	13550	37999	17
44	12892·	99603	13289	13456	99090.	13579.	36389·	16
45	12985	99601·	13383.	13485	99086:	13609	34786	15
46	13078	99599.	13478	13513.	99082:	13639	33189.	14
47	13170.	99598	13572.	13542.	99078:	13668.	31600	13
48	13262:	99596·	13666:	13571.	99074:	13698	30017.	12
49	13355	99594.	13760.	13600	99070:	13727.	28441:	11
50	13447	99592:	13854	13629	99066:	13757.	26872:	10
51	13538.	99591	13947.	13658	99062:	13787	25309:	9
52	13630	99589·	14040:	13686.	99058:	13816.	23753.	8
53	13721.	99587.	14133:	13715.	99054:	13846	22204	7
54	13812:	99585:	14226.	13744	99050:	13876	20661	6
55	13903.	99584	14319.	13773	99046.	13905.	19124.	5
56	13994	99582·	14412	13802	99042.	13935	17594	4
57	14085	99580.	14504	13830.	99038.	13965	16070.	3
58	14175·	99578:	14596.	13859.	99034.	13994.	14553	2
59	14265.	99577	14688	13888.	99030.	14024	13041.	1
'	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	82°

L. Sin.	L. Cos	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot	′
9,14355.	9,99575·	9,14790	0,13917	0,99026.	0,14054	7,11536·	60
14445	99573.	14871.	13946	99022.	14083.	10038	59
14534.	99571:	14963	13974.	99018.	14113	08545.	58
14624	99569:	15054·	14003.	99014.	14143	07059	57
14713.	99568	15145·	14032.	99010.	14172.	05579	56
14802:	99566·	15236	14061	99006	14202	04104.	55
14891	99564.	15326.	14090	99002	14232	02630	54
14980	99562:	15417	14118.	98998	14261.	01174	53
15068.	99560:	15507.	14147.	98994	14291	6,99718	52
15156:	99559	15597:	14176.	98990	14321	98267.	51
15245	99557·	15687.	14205	98985.	14350.	96823	50
15333	99555.	15777	14234	98981.	14380.	95384.	49
15420.	99553:	15867	14262.	98977.	14410	93951:	48
15508	99551:	15956·	14291.	98973	14439.	92524.	47
15595.	99550	16045.	14320	98969	14469.	91103.	46
15682:	99548·	16134:	14349	98965	14499	89687:	45
15769:	99546·	16223.	14378	98960.	14529	88278	44
15856.	99544.	16312	14406.	98956.	14558.	86873.	43
15943.	99542:	16400.	14435.	98952.	14588	85475	42
16030	99540:	16489	14464	98948	14618	84081.	41
16116·	99539	16577·	14493	98944	14647.	82694	40
16202.	99537·	16665·	14521.	98939.	14677.	81312	39
16288.	99535·	16753	14550.	98935.	14707	79935.	38
16374	99533·	16840.	14579.	98931	14736.	78564	37
16459.	99531.	16928	14608	98927	14766.	77198.	36
16545	99529:	17015.	14637	98922.	14796	75838	35
16630.	99527:	17102:	14665.	98918.	14826	74483	34
16715:	99525:	17189.	14694.	98914	14855.	73133·	33
16800.	99524	17276.	14723	98910	14885.	71788	32
16885.	99522·	17363	14752	98905.	14915	70449.	31
16970	99520·	17449.	14780.	98901.	14945	69115.	30
17054.	99518·	17536	14809.	99897	14974.	67786:	29
17138:	99516.	17622·	14838	99892.	15004.	66463	28
17223	99514:	17708·	14867	99888.	15034	65144·	27
17306.	99512:	17794	14896	99884	15064	63831	26
17390.	99510:	17879.	14924.	99879.	15093.	62522.	25
17474	99508:	17965	14953.	99875.	15123.	61219	24
17557.	99507	18050.	14982	99871	15153·	59920.	23
17641	99505·	18136	15011	99866.	15183	58627	22
17724·	99503·	18221·	15039.	99862.	15212.	57338.	21
L. Cos.	L. Sin.	L. Cot	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	81°

8°	L. Sin.	L. Cos	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40	9,17807	9,99501·	9,18305.	0,15068.	0,98858	0,15242.	6,56055	20
41	17890	99499·	18390.	15097	98853.	15272	54776.	19
42	17972.	99497·	18475	15126	98849	15302	53502:	18
43	18055	99495·	18559.	15154.	98844.	15331.	52233:	17
44	18137·	99493.	18643:	15183.	98840.	15361.	50969.	16
45	18219.	99491:	18728	15212	98836	15391	49710	15
46	18301.	99489:	18811.	15241	98831.	15421	48455.	14
47	18383	99487:	18895.	15269.	98827	15451	47205:	13
48	18465	99485:	18979	15298.	98822.	15480.	45960.	12
49	18546.	99483:	19062.	15327	98818	15510.	44720	11
50	18628	99481:	19146	15356	98813.	15540	43484·	10
51	18709·	99479:	19229·	15384.	98809	15570	42253	9
52	18790·	99477:	19312·	15413.	98804.	15599.	41026·	8
53	18871	99475:	19395	15442	98800	15629.	39804	7
54	18951.	99473:	19478	15471	98795.	15659.	38586.	6
55	19032.	99471:	19560.	15499.	98791	15689	37373.	5
56	19112:	99469:	19643	15528.	98786.	15719	36165	4
57	19193	99467:	19725·	15557	98782	15749	34960.	3
58	19273·	99465:	19807·	15585.	98777.	15778.	33761	2
59	19353	99463.	19889	15614.	98773	15808.	32566	1
9°								81°
0′	9,19433	9,99461.	9,19971	0,15643	0,98768.	0,15838	6,31375·	60′
1	19512.	99459.	20052.	15672	98764	15868	30188.	59
2	19592	99457.	20134	15700.	98759.	15898	29006.	58
3	19671.	99455.	20215.	15729.	98755	15927.	27828:	57
4	19751	99453.	20297	15758	98750.	15957.	26655	56
5	19830·	99451.	20378·	15787	98745:	15987.	25485.	55
6	19909	99449.	20459	15815.	98741	16017	24320.	54
7	19987.	99447.	20540	15844.	98736.	16047	23160	53
8	20066.	99445.	20620.	15873	98732	16077	22003·	52
9	20145	99443.	20701	15901.	98727.	16106.	20851	51
10	20223·	99441.	20781.	15930.	98722:	16136·	19702.	50
11	20301.	99439.	20861:	15959	98718	16166.	18558.	49
12	20379.	99437.	20942	15988	98713.	16196	17418.	48
13	20457.	99435.	21022	16016.	98708:	16226	16282:	47
14	20535	99433.	21101.	16045.	98704	16256	15150:	46
15	20613	99431.	21181.	16074	98699.	16286	14023	45
16	20690.	99429	21261	16102.	98694:	16315.	12899·	44
17	20767:	99427	21340.	16131.	98690	16345.	11779·	43
18	20845	99425	21419:	16160	98685.	16375.	10663.	42
19	20922·	99423	21498:	16189	98680:	16405	09551.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	80°

9°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,20999	9,99421	9,21577:	0,16217.	0,98676	0,16435	6,08443:	40
21	21075.	99419	21656.	16246	98671·	16465	07339.	39
22	21152.	99417	21735.	16275	98666.	16495	06239.	38
23	21229	99414.	21814	16303.	98661:	16525	05143	37
24	21305.	99412.	21893.	16332.	98657	16554.	04051	36
25	21381:	99410.	21970:	16361	98652·	16584.	02962·	35
26	21457:	99408.	22049	16389.	98647.	16614.	01877.	34
27	21533.	99406.	22127·	16418.	98642:	16644.	00796:	33
28	21609.	99404	22205	16447	98638	16674	5,99719.	32
29	21685	99402	22283.	16476	98633·	16704	98646	31
30	21760.	99400	22360.	16504.	98628.	16734	97576·	30
31	21836	99398	22438	16533	98623:	16764	96510·	29
32	21911.	99396	22515.	16562	98618:	16794	95448	28
33	21986:	99393.	22592:	16590.	98614	16823.	94389.	27
34	22061:	99391.	22670	16619.	98609·	16853.	93334:	26
35	22136.	99389.	22747·	16648	98604·	16883.	92283	25
36	22211	99387.	22823.	16676.	98599.	16913.	91235.	24
37	22286	99385	22900.	16705.	98594:	16943.	90191	23
38	22360.	99383	22977	16734	98589:	16973.	89150.	22
39	22434:	99381	23053.	16763.	98585	17003.	88113:	21
40	22509	99378.	23130	16791.	98580·	17033	87080	20
41	22583·	99376.	23206	16820	98575·	17063	86050.	19
42	22657	99374.	23283.	16848.	98570·	17093	85024	18
43	22731	99372	23359:	16877.	98565·	17123	84001·	17
44	22805.	99370	23434.	16906	98560.	17153	82981.	16
45	22878	99368.	23510	16934.	98555:	17183	81965.	15
46	22951.	99365	23585.	16963.	98550:	17213	80953	14
47	23025	99363.	23661	16992	98545:	17243	79944	13
48	23098.	99361.	23736.	17020.	98540:	17273.	78938·	12
49	23171·	99359	23812	17049.	98535.	17303.	77935.	11
50	23244	99357	23887·	17078	98530:	17333.	76936.	10
51	23317	99355	23961·	17106.	98525:	17363.	75941	9
52	23389.	99352.	24037	17135.	98520:	17393.	74948.	8
53	23462	99350.	24111.	17164	98515:	17423.	73959.	7
54	23534.	99348	24186	17192.	98510.	17453.	72974	6
55	23607	99346	24261	17221.	98505.	17483.	71991.	5
56	23679·	99344	24335·	17250	98500.	17513.	71012.	4
57	23751.	99341.	24409.	17278.	98495.	17543.	70036:	3
58	23823	99339.	24483:	17307.	98490.	17573.	69063:	2
59	23895	99337	24557:	17336	98485.	17603.	68094	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	80°

10°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,23967	9,99335	9,24631.	0,17364.	0,98480.	0,17632.	5,67128	60
1	24038.	99332.	24705.	17393	98475.	17662.	66165	59
2	24110	99330.	24779	17422	98470.	17692.	65205·	58
3	24181·	99328	24852.	17450.	98465.	17722.	64248·	57
4	24252.	99326	24926	17479	98460.	17752.	63294.	56
5	24323:	99323.	24999.	17508	99455	17782:	62344	55
6	24394.	99321.	25073	17536.	98450	17812:	61396.	54
7	24465.	99319	25146·	17565	98445	17842:	60452	53
8	24536	99317	25219	17593.	98440	17872:	59511	52
9	24606.	99314.	25292	17622.	98434.	17902:	58573	51
10	24677	99312.	25364.	17651	98429.	17932:	57637.	50
11	24747.	99310	25437	17679.	98424.	17962:	56705.	49
12	24818	99308	25509.	17708	98419.	17992:	55776.	48
13	24888·	99305.	25582	17737	98414	18022:	54850.	47
14	24958·	99303.	25654.	17765.	98409	18052:	53927	46
15	25028	99301	25726:	17794	98404	18082:	53007	45
16	25098	99299	25799	17822.	98398.	18112:	52090	44
17	25167.	99296.	25870.	17851.	98393.	18143	51175.	43
18	25237	99294	25942.	17880	98388.	18173·	50264	42
19	25306.	99292	26014.	17908.	98383	18203·	49356	41
20	25376	99289.	26086	17937	98378	18233·	48450.	40
21	25445·	99287.	26157.	17966	98372.	18263·	47547.	39
22	25514·	99285	26229	17994.	98367.	18293·	46648	38
23	25583	99282.	26300.	18023	98362	18323·	45751·	37
24	25652	99280.	26371:	18051.	98357	18353·	44857	36
25	25721	99278	26442:	18080.	98351.	18383.	43965.	35
26	25789.	99275.	26513.	18109	98346.	18413:	43077	34
27	25858	99273.	26584.	18137.	98341	18443:	42191.	33
28	25926.	99271	26655	18166	98336	18473:	41309	32
29	25995	99268.	26726	18194.	98330.	18503:	40429	31
30	26063·	99266.	26796.	18223.	98325	18533:	39551.	30
31	26131·	99264	26867	18252	98320	18563:	38677	29
32	26199	99261.	26937·	18280.	98314.	18594	37805·	28
33	26267	99259.	27007.	18309	98309.	18624·	36936·	27
34	26335	99257	27077:	18337.	98304	18654·	36069.	26
35	26402.	99254.	27147:	18366.	98298.	18684·	35206	25
36	26470	99252	27217.	18395	98293.	18714·	34345·	24
37	26537.	99250	27287.	18423.	98288	18744.	33496.	23
38	26605	99247.	27357	18452	98282.	18774:	32631	22
39	26672·	99245	27426.	18480.	98277	18804:	31778	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	79°

10°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,26739·	9,99243	9,27496	0,18509	0,98272	0,18834:	5,30927.	20
41	26806·	99240.	27565.	18538	98266.	18865	30080	19
42	26873	99238	27635	18566.	98261	18895·	29235	18
43	26940	99235.	27704·	18595	98255.	18925·	28392.	17
44	27006.	99233	27773·	18623.	98250	18955·	27552:	16
45	27073	99231	27842	18652	98245	18985.	26715	15
46	27139.	99228.	27911	18680.	98239.	19015:	25880·	14
47	27206	99226	27980	18709.	98234	19045:	25048	13
48	27272.	99223.	28048.	18738	98228.	19076	24218·	12
49	27338.	99221	28117	18766.	98223	19106·	23391	11
50	27404.	99219	28185.	18795	98217.	19136·	22566·	10
51	27470.	99216.	28254	18823.	98212	19166·	21744	9
52	27536.	99214	28322.	18852	98206.	19106.	20924.	8
53	27602	99211.	28390:	18880.	98201	19226:	20107	7
54	27668	99209	28458:	18909.	98195.	19256:	19292.	6
55	27733.	99206.	28526.	18938	98190	19287	18480	5
56	27799	99204	28594.	18966.	98184.	19317·	17670.	4
57	27864·	99202	28662	18995	98179	19347·	16863	3
58	27929.	99199.	28730	19023.	98173.	19377.	16058	2
59	27994:	99197	28797.	19052	98168	19407:	15255.	1
11°								79°
0′	9,28059:	9,99194.	9,28865	0,19080.	0,98162.	0,19438	5,14455	60′
1	28124.	99192	28932.	19109	98157	19468·	13657.	59
2	28189.	99189.	28999:	19138	98151.	19498·	12862	58
3	28254	99187	29067	19166.	98146	19528.	12069	57
4	28319	99184.	29134	19195	98140·	19558:	11278.	56
5	28383.	99182	29201·	19223.	98134.	19589	10490	55
6	28448	99179.	29269	19252	98129	19619·	09704·	54
7	28512·	99177	29334.	19280.	98123.	19649·	08920.	53
8	28576.	99174.	29401.	19309	98118	19679.	08139	52
9	28640:	99172	29468	19337.	98112·	19709:	07360	51
10	28704:	99169.	29584.	19366	98106.	19740	06583.	50
11	28768.	99167	29601	19394.	98101	19770·	05809	49
12	28832.	99164.	29667.	19423	98095.	19800.	05036.	48
13	28896	99162	29733:	19451.	98089:	19830:	04267	47
14	28960	99159.	29800	19480.	98084	19860:	03499·	46
15	29023.	99157	29866·	19509	98078.	19891	02733.	45
16	29087	99154.	29932	19537.	98072:	19921·	01970.	44
17	29150·	99152	29998	19566	98067	19951.	01209:	43
18	29213.	99149.	30063.	19594.	98061·	19981:	00451	42
19	29276:	99147	30129.	19623	98055.	20012	4,99694.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	78°

11°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,29339:	9,99144	9,30195	0,19651.	0,98050	0,20042·	4,99940	40
21	29402.	99142	30260.	19680	98044·	20072.	99188	39
22	29465.	99139.	30326	19708.	98038.	20103	97438·	38
23	29528.	99137	30391·	19737	98032:	20133·	96690·	37
24	29591	99134.	30456:	19765.	98027	20163.	95944.	36
25	29653.	99132	30521:	19794	98021·	20193:	95201	35
26	29716	99129.	30586:	19822.	98015.	20224	94459.	34
27	29778.	99126:	30651.	19851	98009:	20254·	93720.	33
28	29841	99124	30716.	19879.	98004	20284.	92983.	32
29	29903·	99121.	30781.	19908	97998·	20314:	92248:	31
30	29965.	99119	30846	19936.	97992·	20345	91515:	30
31	30027:	99116.	30910.	19965	97986.	20375.	90784:	29
32	30089.	99114	30975	19993.	97980:	20405:	90056	28
33	30151	99111.	31039.	20022	97975	20436	89329.	27
34	30213	99108:	31104	20050.	97969·	20466·	88604:	26
35	30274.	99106	31168·	20079	97963·	20496.	87882	25
36	30336	99103.	31232.	20107.	97957.	20527	87162	24
37	30397.	99101	31296:	20136	97951:	20557·	86443.	23
38	30459	99098.	31360:	20164.	97945:	20587.	85727	22
39	30520.	99095:	31424.	20193	97939:	20618	85012.	21
40	30581:	99093	31488.	20221.	97934	20648·	84300	20
41	30643	99090.	31552	20250	97928·	20678.	83590	19
42	30704·	99088	31615.	20278.	97922·	20709	82881.	18
43	30765	99085.	31679	20307	97916·	20739·	82175	17
44	30825.	99082:	31742.	20335.	97910·	20769.	81470.	16
45	30886.	99080	31806	20364	97904.	20800	80768.	15
46	30947	99077.	31869.	20392.	97898:	20830·	80068	14
47	31007.	99075	31932:	20421	97892:	20860.	79369.	13
48	31068	99072·	31996	20449.	97886:	20891	78672:	12
49	31128.	99069.	32059·	20478	97880:	20921·	77978	11
50	31189	99067	32122	20506.	97874:	20951.	77285.	10
51	31249.	99064·	32185	20535	97868:	20982	76594:	9
52	31309:	99061.	32247.	20563·	97862:	21012.	75906	8
53	31369:	99059	32310.	20591.	97856:	21042:	75219	7
54	31429.	99056·	32373	20620	97850:	21073	74534	6
55	31489.	99053.	32435.	20648.	97844.	21103.	73850.	5
56	31549	99051	32498	20677	97838.	21134	73169.	4
57	31609	99048·	32560.	20705.	97832.	21164·	72490	3
58	31668.	99045.	32623	20734	97826.	21194.	71812.	2
59	31728	99043	32685·	20762.	97820.	21225	71136:	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	78°

12°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,31787	9,99040	9,32747	0,20791	0,97814	0,21255	4,70463	60
1	31847	99037	32809	20819	97808	21286	69791	59
2	31906	99035	32871	20848	97802	21316	69120	58
3	31965	99032	32933	20876	97796	21346	68452	57
4	32024	99029	32995	20904	97790	21377	67785	56
5	32084	99026	33057	20933	97784	21407	67121	55
6	32142	99024	33118	20961	97778	21438	66458	54
7	32201	99021	33180	20990	97772	21468	65797	53
8	32260	99018	33241	21018	97766	21499	65137	52
9	32319	99016	33303	21047	97759	21529	64480	51
10	32378	99013	33364	21075	97753	21559	63824	50
11	32436	99010	33425	21104	97747	21590	63170	49
12	32495	99007	33487	21132	97741	21620	62518	48
13	32553	99005	33548	21160	97735	21651	61867	47
14	32611	99002	33609	21189	97729	21681	61219	46
15	32669	98999	33670	21217	97723	21712	60572	45
16	32728	98996	33731	21246	97716	21742	59926	44
17	32786	98994	33791	21274	97710	21773	59283	43
18	32844	98991	33852	21303	97704	21803	58641	42
19	32902	98988	33913	21331	97698	21833	58001	41
20	32959	98985	33973	21359	97692	21864	57362	40
21	33017	98983	34034	21388	97685	21894	56726	39
22	33075	98980	34094	21416	97679	21925	56091	38
23	33132	98977	34155	21445	97673	21955	55457	37
24	33190	98974	34215	21473	97667	21986	54826	36
25	33247	98972	34275	21501	97660	22016	54196	35
26	33305	98969	34335	21530	97654	22047	53567	34
27	33362	98966	34395	21558	97648	22077	52941	33
28	33419	98963	34455	21587	97642	22108	52316	32
29	33476	98960	34515	21615	97635	22138	51692	31
30	33533	98958	34575	21643	97629	22169	51070	30
31	33590	98955	34635	21672	97623	22199	50450	29
32	33647	98952	34694	21700	97616	22230	49832	28
33	33704	98949	34754	21729	97610	22261	49215	27
34	33760	98946	34814	21757	97604	22291	48600	26
35	33817	98944	34873	21785	97598	22322	47986	25
36	33874	98941	34932	21814	97591	22352	47374	24
37	33930	98938	34992	21842	97585	22383	46763	23
38	33987	98935	35051	21871	97578	22413	46154	22
39	34043	98932	35110	21899	97572	22444	45547	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	77°

12°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,34099.	9,98929:	9,35169:	0,21927.	0,97566	0,22474.	4,44941:	20
41	34156.	98927	35228.	21956	97559.	22505	44337.	19
42	34211:	98924·	35287.	21984.	97553	22535.	43734:	18
43	34267:	98921·	35346.	22012:	97547	22566.	43133.	17
44	34323.	98918.	35405	22041·	97540.	22597	42534	16
45	34379.	98915:	35464	22069.	97534	22627.	41936·	15
46	34435.	98912:	35522.	22098	97527.	22658	41339.	14
47	34491	98909:	35581	22126·	97521	22688.	49745	13
48	34546.	98907	35639.	22154.	97514.	22719	40151.	12
49	34602	98904:	35698	22183	97508	22750	39559:	11
50	34657.	98901·	35756.	22211.	97502	22780.	39969	10
51	34713	98898·	35814:	22239:	97495.	22811	38390.	9
52	34768.	98895.	35873	22268	97489	22841.	37793	8
53	34823:	98892.	35931·	22296.	97482.	22872	37207·	7
54	34979	98889:	35989·	22325	97476	22903	36622.	6
55	34934·	98886:	36047·	22353·	97469.	22933.	36040	5
56	34989·	98884	36105	22381.	97463	22964	35458.	4
57	35044	98881·	36163	22410	97456.	22994.	34878:	3
59	35099	98878·	36220.	22438·	97450	23025.	34300	2
59	35154	98875·	36278.	22466.	97443.	23056	33723	1
13°								7
0′	9,35208.	9,98872·	9,36336	0,22495	0,97437	0,23086.	4,33147.	6
1	35263	98869·	36394	22523·	97430·	23117	32573	5
2	35318	98866.	36451.	22551.	97423.	23148	32000.	5
3	35372.	98863:	36509	22580	97417	23178.	31429.	5
4	35427	98860:	36566·	22608·	97410.	23209	30859:	5
5	35481	98857:	36623.	22636.	97404	23240	30291	5
6	35535.	98854:	36680:	22665	97397.	23270.	29724·	5
7	35590	98851:	36739	22693·	97390:	23301	29158.	5
8	35644·	98848:	36795·	22721.	97384	23332	28594.	5
9	35698·	98845:	36852·	22750	97377.	23362.	28031:	5
10	35752·	98843	36909	22778·	97371	23393	27470.	5
11	35806	98840·	36966	22806.	97364.	23424	26910:	4
12	35860	98837·	37023	22835	97357:	23454.	26352	4
13	35914	98834·	37079.	22863·	97351	23485	25795	4
14	35967.	98831·	37136.	22891.	97344.	23516	25239·	4
15	36021.	98828·	37193	22920	97337:	23546.	24684.	4
16	36075	98825·	37249.	22948·	97331	23577.	24131.	4
17	36128.	98822·	37306	22976.	97324.	23608	23580	4
18	36182	98819·	37362.	23004:	97317:	23638.	23029.	4
19	36235.	98816·	37419	23033	97311	23669.	22480:	4
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	′

13°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,36288	9,98813	9,37475	0,23061	0,97304	0,23700	4,21933	40
21	36342	98810	37531	23089	97297	23731	21386	39
22	36395	98807	37588	23118	97291	23761	20841	38
23	36448	98804	37644	23146	97284	23792	20298	37
24	36501	98801	37700	23174	97277	23823	19756	36
25	36554	98798	37756	23203	97270	23854	19215	35
26	36607	98795	37812	23231	97264	23884	18675	34
27	36660	98792	37868	24259	97257	23915	18137	33
28	36713	98789	37923	23287	97250	23946	17600	32
29	36765	98786	37979	23316	97243	23977	17064	31
30	36818	98783	38035	23344	97236	24007	16529	30
31	36871	98780	38090	23372	97230	24038	15996	29
32	36923	98777	38146	23401	97223	24069	15465	28
33	36976	98774	38202	23429	97216	24100	14934	27
34	37028	98770	38257	23457	97209	24130	14405	26
35	37080	98767	38312	23485	97202	24161	13877	25
36	37133	98764	38368	23514	97196	24192	13350	24
37	37185	98761	38423	23542	97189	24223	12824	23
38	37237	98758	38478	23570	97182	24254	12300	22
39	37289	98755	38533	23599	97175	24284	11777	21
40	37341	98752	38588	23627	97168	24315	11256	20
41	37393	98749	38643	23655	97161	24346	10735	19
42	37445	98746	38698	23683	97154	24377	10216	18
43	37496	98743	38753	23712	97148	24408	09698	17
44	37548	98740	38808	23740	97141	24439	09181	16
45	37600	98737	38863	23768	97134	24469	08666	15
46	37651	98734	38917	23796	97127	24500	08151	14
47	37703	98731	38972	23825	97120	24531	07638	13
48	37754	98727	39027	23853	97113	24562	07127	12
49	37806	98724	39081	23881	97106	24593	06616	11
50	37857	98721	39135	23909	97099	24624	06107	10
51	37908	98718	39190	23938	97092	24654	05598	9
52	37960	98715	39244	23966	97085	24685	05091	8
53	38011	98712	39298	23994	97078	24716	04585	7
54	38062	98709	39353	24022	97071	24747	04081	6
55	38113	98706	39407	24051	97064	24778	03577	5
56	38164	98702	39461	24079	97057	24809	03075	4
57	38215	98699	39515	24107	97050	24840	02574	3
58	38266	98696	39569	24135	97043	24871	02074	2
59	38316	98693	39623	24163	97036	24901	01575	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	76°

14°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,38367	9,98690	9,39677	0,24192	0,97029	0,24932	4,01078	60
1	38418	98687	39730	24220	97022	24963	00581	59
2	38468	98684	39784	24249	97015	24994	00086	58
3	38519	98680	39838	24276	97008	25025	3,99592	57
4	38569	98677	39891	24305	97001	25056	99099	56
5	38620	98674	39945	24333	96994	25087	98607	55
6	38670	98671	39998	24361	96987	25118	98116	54
7	38720	98668	40052	24389	96980	25149	97627	53
8	38770	98665	40105	24417	96973	25180	97138	52
9	38821	98661	40159	24446	96965	25211	96651	51
10	38871	98658	40212	24474	96958	25242	96165	50
11	38921	98655	40265	24502	96951	25272	95680	49
12	38971	98652	40318	24530	96944	25303	95196	48
13	39020	98649	40371	24558	96937	25334	94713	47
14	39070	98645	40424	24587	96930	25365	94231	46
15	39120	98642	40477	24615	96923	25396	93750	45
16	39170	98639	40530	24643	96915	25427	93271	44
17	39219	98636	40583	24671	96908	25458	92792	43
18	39269	98633	40636	24699	96901	25489	92315	42
19	39319	98629	40689	24728	96894	25520	91839	41
20	39368	98626	40741	24756	96887	25551	91364	40
21	39417	98623	40794	24784	96879	25582	90890	39
22	39467	98620	40847	24812	96872	25613	90417	38
23	39516	98616	40899	24840	96865	25644	89945	37
24	39565	98613	40952	24868	96858	25675	89474	36
25	39614	98610	41004	24897	96851	25706	89004	35
26	39664	98607	41056	24925	96843	25737	88535	34
27	39713	98603	41109	24953	96836	25768	88068	33
28	39762	98600	41161	24981	96829	25799	87601	32
29	39811	98597	41213	25009	96822	25830	87135	31
30	39859	98594	41265	25038	96814	25861	86671	30
31	39908	98590	41317	25066	96807	25892	86207	29
32	39957	98587	41369	25094	96800	25923	85745	28
33	40006	98584	41421	25122	96792	25954	85283	27
34	40054	98581	41473	25150	96785	25985	84823	26
35	40103	98577	41525	25179	96778	26016	84364	25
36	40152	98574	41577	25206	96770	26048	83905	24
37	40200	98571	41629	25235	96763	26079	83448	23
38	40249	98567	41680	25263	96756	26110	82992	22
39	40297	98564	41732	25291	96748	26141	82537	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	75°

14°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,40345.	9,98561	9,41784	0,25319.	0,96741.	0,26172·	3,82082.	20
41	40393:	98557.	41835.	25347:	96734	26203·	81629.	19
42	40441:	98554.	41887	25375:	96726.	26234.	81177	18
43	40490	98551	41938.	25403:	96719	26265:	80726	17
44	40538·	98548	41990	25432	96711.	26296:	80275.	16
45	40586·	98544.	42041	25460·	96704.	26327:	79826.	15
46	40634	98541	42092.	25488·	96697	26358:	79378	14
47	40682	98538	42143:	25516·	96689.	26390	78931	13
48	40729.	98534.	42195	25544.	96682	26421·	78484.	12
49	40777.	98531	42246·	25572:	96674.	26452·	78039.	11
50	40825	98528	42297·	25600:	96667	26483·	77595	10
51	40873	98524.	42348·	25628:	96660	26514.	77151.	9
52	40920.	98521	42399	25657	96652.	26545:	76709	8
53	40968	98517.	42450	25685·	96645	26576:	76268	7
54	41015.	98514.	42501	25713·	96637.	26607:	75827.	6
55	41063	98511	42551.	25741·	96630	26639	75388	5
56	41110.	98507.	42602.	25769·	96622.	26670·	74949.	4
57	41157:	98504.	42653	25797.	96615	26701·	74512	3
58	41205	98501	42704	25825:	96607.	26732.	74075·	2
59	41252·	98497.	42754.	25853:	96600	26763:	73639.	1
15°								75°
0′	9,41299.	9,98494	9,42805	0,25881:	0,96592.	0,26794:	3,73205	60′
1	41346:	98490.	42855.	25910	96585	26826	72771·	59
2	41393:	98487.	42906	25938·	96577.	26857·	72338·	58
3	41440:	98484	42956.	25966·	96569:	26888·	71906.	57
4	41487.	98480.	43006:	25994·	96562	26919.	71475:	56
5	41534.	98477	43057	26022·	96554.	26950:	71045.	55
6	41581.	98473.	43107.	26050·	96547	26982	70616	54
7	41628	98470.	43157:	26078.	96539.	27013·	70188	53
8	41675	98467	43207:	26106:	96532	27044·	69761	52
9	41721.	98463.	43257:	26134:	96524·	27075.	69334.	51
10	41768	98460	43308	26162:	96516.	27106:	68909	50
11	41814.	98456.	43358·	26190:	96509	27138	68484.	49
12	41861	98453	43408	26218:	96501.	27169·	68061	48
13	41907.	98450	43457.	26246:	96494	27200·	67638·	47
14	41954	98446.	43507.	26275	96486·	27231:	67216.	46
15	42000.	98443	43557.	26303·	96478.	27263	66795:	45
16	42047	98439.	43607	26331·	96471	27294·	66375.	44
17	42093·	98436	43657	26359·	96463·	27325.	65956.	43
18	42139.	98432.	43706.	26387·	96455.	27356:	65538	42
19	42185:	98429	43756	26415·	96448	27388	65121	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	74°

15°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,42231:	9,98425.	9,43805.	0,26443·	0,96440·	0,27419·	3,64704.	40
21	42277:	98422	43855	26471·	96432.	27450.	64289	39
22	42323.	98418.	43904.	26499.	96429:	27482	63874·	38
23	42369.	98415	43954	26527:	96417	27513·	63460.	37
24	42415.	98412	44003.	26555:	96409.	27544.	63047:	36
25′	42461	98408.	44052:	26583:	96401:	27575:	62635.	35
26	42507	98405	44102	26611:	96394	27607	62224	34
27	42552.	98401.	44151·	26639:	96386·	27638·	61814	33
28	42598.	98398	44200.	26667:	96378.	27669.	61404.	32
29	42644	98394.	44249:	26695:	96370:	27701	60996	31
30	42689.	98391	44298:	26723:	96363	27732·	60588·	30
31	42735	98387.	44347.	26751:	96355·	27763.	60181·	29
32	42780.	98384	44396.	26779:	96347·	27795	59775	28
33	42826	98390.	44445.	26807:	96339.	27826·	59370	27
34	42871	98377	44494.	26835:	96331:	27857.	58965.	26
35	42917	98373·	44543.	26863:	96324	27889	58562	25
36	42962·	98369.	44592	26391:	96316·	27920.	58159.	24
37	43007.	98366	44641	26920	96308·	27951:	57757:	23
38	43052:	98362.	44689.	26948·	96300.	27983	57356:	22
39	43097:	98359	44738	26976·	96292:	28014.	56956:	21
40	43142:	98355.	44787	27004·	96284:	28045:	56557	20
41	43187:	98352	44835.	27032·	96277	28077	56158.	19
42	43232.	98348.	44884	27060	96269	28108.	55761	18
43	43277.	98345	44932.	27088·	96261·	28140	55364·	17
44	43322.	98341.	44981	27116	96253	28171.	54968	16
45	43367	98338	45029·	27144	96245.	28202:	54573	15
46	43412	98334·	45077.	27172	96237:	28234	54178.	14
47	43456.	98330.	45126	27200	96229:	28265.	53785	13
48	43501.	98327	45174·	27228	96221:	28297	53392.	12
49	43546	98323.	45222	27256	96213:	28328.	53000:	11
50	43590.	98320	45270.	27284	96205:	28359:	52609	10
51	43635	98316.	45318:	27311.	96198	28391	52219	9
52	43679.	98313	45366:	27339.	96190·	28422.	51829·	8
53	43724	98309·	45414:	27367.	96182·	28454	51440.	7
54	43768.	98305.	45462.	27395.	96174·	28485.	51052:	6
55	43812:	98302	45510.	27423.	96166·	28517	50665.	5
56	43857	98298.	45558.	27451.	96158·	28548.	50279	4
57	43901·	98295	45606	27479.	96150·	28580	49893.	3
58	43945.	98291·	45654	27507.	96142	28611.	49508:	2
59	43989:	98287.	45701.	27535.	96134	28643	49124.	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	74°

16°	L. Sin.	L. Cos	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,44033:	9,98284	9,45749.	0,27563.	0,96126	0,28674.	3,48741	60
1	44077:	98280.	45797	27591.	96118	28706	48358.	59
2	44121.	98276:	45844.	27619.	96110	28737.	47977	58
3	44165.	98273	45892	27647.	96102	28769	47596·	57
4	44209.	98269.	45940	27675.	96094	28800.	47216	56
5	44253	98266	45987·	27703.	96085.	28832	46836.	55
6	44297	98262·	46034.	27731	96077.	28863.	46458	54
7	44341	98258.	46082	27759	96069.	28895	46080·	53
8	44384.	98255	46129.	27787	96061.	28926.	45703	52
9	44428	98251·	46176:	27815	96053.	28958	45326.	51
10	44471.	98247.	46224	27843	96045.	28989.	44951	50
11	44515.	98244	46271·	27871	96037	29021	44576·	49
12	44559	98240·	46318.	27899	96029	29052.	44202	48
13	44602	98236.	46365:	27927	96021	29084	43828.	47
14	44645.	98233	46412:	27954.	96013	29115.	43456	46
15	44689	98229·	46459:	27982.	96004.	29147	43084·	45
16	44732.	98225.	46506.	28010.	95996.	29178.	42713	44
17	44775:	98222	46553.	28038.	95988.	29210	42342.	43
18	44819	98218·	46600.	28066.	95980.	29242	41973	42
19	44862·	98214.	46647.	28094.	95972	29273.	41604·	41
20	44905·	98210:	46694	28122.	95964	29305	41236	40
21	44948·	98207	46741	28150	95956	29336.	40868.	39
22	44991.	98203.	46788	28178	95947.	29368	40502	38
23	45034.	98199:	46834.	28206	95939.	29399.	40136·	37
24	45077	98196	46881	28234	95931	29431.	39770.	36
25	45120	98192·	46928	28262	95923	29463	39406	35
26	45163	98188.	46974.	28289.	95914.	29494.	39042·	34
27	45206	98184:	47021	28317.	95906.	29526	38679	33
28	45248.	98181	47067.	28345.	95898	29558	38316.	32
29	45291.	98177·	47114	28373.	95890	29589.	37955	31
30	45334	98173.	47160·	28401.	95881.	29621	37594·	30
31	45376.	98169.	47206.	28429	95873.	29652.	37234	29
32	45419	98166	47253	28457	95865	29684.	36874.	28
33	45461.	98162·	47299·	28485	95857	29716	36515:	27
34	45504	98158.	47345.	28513	95848.	29747.	36157.	26
35	45546.	98154:	47391:	28540.	95840.	29779.	35800	25
36	45589	98151	47438	28568.	95832	29811	35443·	24
37	45631.	98147·	47484·	28596.	95823.	29842.	35087	23
38	45673:	98143.	47530·	28624.	95815.	29874.	34731.	22
39	45716	98139:	47576·	28652	95807	29906	34377	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L Cot	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	73°

16°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,45758·	9,98136	9,47622	0,28680	0,95798.	0,29938	3,34023·	20
41	45800.	98132·	47668	28708	95790.	29969.	33669.	19
42	45842:	98128.	47714	28736	95782	30001	33317	18
43	45884:	98124:	47760	28763.	95773.	30033	32965·	17
44	45926:	98120:	47805.	28791.	95765.	30064.	32614	16
45	45968.	98117	47851.	28819.	95757	30096.	32263.	15
46	46010.	98113·	47897	28847	95784.	30128	31913.	14
47	46052.	98109.	47943	28875	95740	30160	31564.	13
48	46094.	98105:	47988.	28903	95731.	30191.	31215.	12
49	46136	98101:	48034.	28931	95723.	30223.	30868	11
50	46178	98098	48080	28958.	95715	30255	30520.	10
51	46219.	98094·	48125.	28986.	95706.	30287	30174	9
52	46261.	98090·	48171	29014.	95698	30318.	29828.	8
53	46303	98086.	48216.	29042	95689.	30350.	29483.	7
54	46344.	98082:	48262	29070	95681.	30382	29138.	6
55	46386	98078:	48307	29098	95672.	30414	28794:	5
56	46427.	98075	48352.	29125.	95664	30445.	28451.	4
57	46469	98071·	48398	29153.	95655.	30477.	28109	3
58	46510.	98067·	48443·	29181.	95647	30509	27767·	2
59	46552	98063·	48488.	29209	95638.	30541	27425.	1
17°								73°
0′	9,46593.	9,98059.	9,48533:	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	60′
1	46631:	98055:	48579	29261.	95621.	30604.	26745·	59
2	46676	98051:	48624·	29292.	95613	30636.	26405.	58
3	46717·	98048	48669·	29320.	95604.	30668.	26067	57
4	46758·	98044·	48714·	29348	95596	30700	25729	56
5	46799.	98040·	48759	29376	95587.	30732	25391.	55
6	46840:	98036·	48804	29404	95579	30764	25055	54
7	46881:	98032	48849	29431.	95570.	30795.	24718.	53
8	46922.	98028.	48894	29459.	95562	30827.	24383	52
9	46963.	98024:	48938.	29487	95553.	30859.	24048.	51
10	47004.	98020:	48983.	29515	95545	30891	23714	50
11	47045	98016:	49028.	29543	95536·	30923	23380.	49
12	47086	98012:	49073	29570.	95527.	30955	23047:	48
13	47127	98009	49118	29598.	95519	30987	22715	47
14	47167.	98005·	49162.	29626	95510.	31018.	22383.	46
15	47208.	98001·	49207	29654	95501:	31050.	22052.	45
16	47249	97997·	49251.	29681.	95493	31082.	21722	44
17	47289.	97993·	49296	29709.	95484.	31114.	21392·	43
18	47330	97989·	49340.	29737	95476	31146.	21063	42
19	47370.	97985.	49385	29765	95467·	31178	20734·	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	72°

L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
9,47411	9,97981:	9,49429.	0,29793	0,95458.	0,31210	3,20406	40
47451.	97977:	49474	29820.	95450	31242	20078.	39
47492	97973:	49518.	29848.	95441·	31274	19752	38
47532.	97969:	49562:	29876	95432.	31306	19425.	37
47573	97965:	49607	29904	95424	31338	19100	36
47613·	97961:	49651.	29931.	95415·	31370	18775·	35
47653.	97957:	49695:	29959.	95406.	31402	18451	34
47693:	97953:	49739:	29987	95397:	31433.	18127·	33
47733:	97949:	49784	30015	95389	31465.	17804	32
47774	97945:	49828·	30042.	95380·	31497.	17481·	31
47814·	97941:	49872·	30070.	95371.	31529.	17159·	30
47854·	97937:	49916·	30098	95362:	31561.	16838	29
47894	97933:	49960	30126	95354	31593.	16517·	28
47934	97929:	50004	30153.	95345·	31625.	16197	27
47974	97925:	50048	30181.	95336.	31657.	15877·	26
48014	97921.	50092	30209	95327:	31689:	15558	25
48053.	97917.	50135.	30236.	95319	31721:	15239.	24
48093.	97913.	50179.	30264:	95310·	31753:	14922	23
48133	97909.	50223	30292	95301·	31785:	14604.	22
48173	97905.	50267	30320	95292.	31817:	14288	21
48212.	97901.	50310.	30347.	95283:	31849:	13971.	20
48252	97897.	50354.	30375.	95274:	31882	13656	19
48292	97893.	50398	30403	95266	31914·	13341·	18
48331.	97889.	50441.	30431	95257·	31946·	13027	17
48371	97885.	50485	30458.	95248·	31978·	12713·	16
48410.	97881.	50528.	30486	95239.	32010·	12399.	15
48450	97877.	50572	30514	95230:	32042·	12087	14
48489.	97873.	50615.	30541.	95221:	32074·	11775	13
48528:	97869.	50659	30569.	95212:	32106·	11463.	12
48568	97865.	50702.	30597	95204	32138.	11152:	11
48607·	97861	50746	30624.	95195·	32170:	10842	10
48646.	97857	50789·	30652.	95186·	32202:	10532·	9
48685:	97853	50832.	30680	95177·	32234:	10222.	8
48725	97849	50875:	30707.	95168·	32266:	09914	7
48764·	97845	50919	30735.	95159·	32299	09605.	6
48803·	97841	50962·	30763	95150·	32331·	09298	5
48842·	97837	51005·	30791	95141.	32363·	08991	4
48881·	97832.	51048·	30818.	95132:	32395.	08684.	3
48920	97828.	51091.	30846	95123:	32427:	08378:	2
48959	97824.	51134:	30874	95114:	32459:	08073	1
L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	72°

18°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang.	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
0'	9,48998	9,97820	9,51177	0,30901	0,95105	0,32491	3,07768	60
1	49037	97816	51220	30929	95096	32524	07464	59
2	49075	97812	51263	30957	95087	32556	07160	58
3	49114	97808	51306	30984	95078	32588	06856	57
4	49153	97804	51349	31012	95069	32620	06554	56
5	49192	97800	51392	31039	95060	32653	06252	55
6	49230	97795	51434	31067	95051	32685	05950	54
7	49269	97791	51477	31095	95042	32717	05649	53
8	49308	97787	51520	31122	95033	32749	05348	52
9	49346	97783	51563	31150	95024	32781	05048	51
10	49385	97779	51605	31178	95015	32813	04749	50
11	49423	97775	51648	31205	95006	32846	04450	49
12	49462	97771	51690	31233	94997	32878	04151	48
13	49500	97766	51733	31261	94988	32910	03853	47
14	49538	97762	51776	31288	94979	32942	03556	46
15	49577	97758	51818	31316	94969	32975	03259	45
16	49615	97754	51861	31344	94960	33007	02963	44
17	49653	97750	51903	31371	94951	33039	02667	43
18	49691	97746	51945	31399	94942	33071	02372	42
19	49730	97741	51988	31426	94933	33104	02077	41
20	49768	97737	52030	31454	94924	33136	01783	40
21	49806	97733	52072	31482	94915	33168	01489	39
22	49844	97729	52115	31509	94905	33200	01196	38
23	49882	97725	52157	31537	94896	33233	00903	37
24	49920	97720	52199	31564	94887	33265	00611	36
25	49958	97716	52241	31592	94878	33297	00319	35
26	49996	97712	52283	31620	94869	33330	00028	34
27	50034	97708	52325	31647	94860	33362	2,99737	33
28	50072	97704	52367	31675	94850	33394	99447	32
29	50109	97699	52409	31702	94841	33427	99157	31
30	50147	97695	52451	31730	94832	33459	98868	30
31	50185	97691	52493	31758	94823	33491	98579	29
32	50223	97687	52535	31785	94813	33524	98291	28
33	50260	97682	52577	31813	94804	33556	98003	27
34	50298	97678	52619	31840	94795	33588	97716	26
35	50335	97674	52661	31868	94786	33621	97430	25
36	50373	97670	52703	31895	94776	33653	97143	24
37	50411	97665	52745	31923	94767	33686	96858	23
38	50448	97661	52786	31951	94758	33718	96573	22
39	50485	97657	52828	31978	94748	33750	96288	21
'	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	

18°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,50523	9,97653	9,52870	0,32006	0,94739	0,33783	2,96004	20
41	50560	97648	52911	32033	94730	33815	95720	19
42	50598	97644	52953	32061	94721	33848	95437	18
43	50635	97640	52995	32088	94711	33880	95154	17
44	50672	97636	53036	32116	94702	33912	94872	16
45	50709	97631	53078	32143	94693	33945	94590	15
46	50747	97627	53119	32171	94683	33977	94309	14
47	50784	97623	53161	32199	94674	34010	94028	13
48	50821	97618	53202	32226	94664	34042	93748	12
49	50858	97614	53243	32254	94655	34075	93468	11
50	50895	97610	53285	32281	94646	34107	93188	10
51	50932	97605	53326	32309	94636	34140	92909	9
52	50969	97601	53367	32336	94627	34172	92631	8
53	51006	97597	53409	32364	94617	34205	92353	7
54	51043	97593	53450	32391	94608	34237	92076	6
55	51080	97588	53491	32419	94599	34270	91799	5
56	51117	97584	53532	32446	94589	34302	91522	4
57	51153	97580	53573	32474	94580	34335	91246	3
58	51190	97575	53615	32501	94570	34367	90970	2
59	51227	97571	53656	32529	94561	34400	90695	1
19°								71°
0′	9,51264	9,97567	9,53697	0,32556	0,94551	0,34432	2,90421	60′
1	51300	97562	53738	32584	94542	34465	90146	59
2	51337	97558	53779	32611	94532	34497	89873	58
3	51374	97553	53820	32639	94523	34530	89599	57
4	51410	97549	53861	32666	94513	34562	89327	56
5	51447	97545	53902	32694	94504	34595	89054	55
6	51483	97540	53942	32721	94494	34628	88782	54
7	51520	97536	53983	32749	94485	34660	88511	53
8	51556	97532	54024	32776	94475	34693	88240	52
9	51592	97527	54065	32804	94466	34725	87969	51
10	51629	97523	54106	32831	94456	34758	87699	50
11	51665	97518	54146	32859	94447	34791	87430	49
12	51701	97514	54187	32886	94437	34823	87160	48
13	51738	97510	54228	32914	94428	34856	86892	47
14	51774	97505	54268	32941	94418	34888	86623	46
15	51810	97501	54309	32969	94408	34921	86356	45
16	51846	97496	54349	32996	94399	34954	86088	44
17	51882	97492	54390	33023	94389	34986	85821	43
18	51919	97488	54430	33051	94380	35019	85555	42
19	51955	97483	54471	33078	94370	35052	85289	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	70°

19°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,51991	9,97479	9,54511	0,33106	0,94360	0,35084	2,85023	40
21	52027	97474	54552	33133	94351	35117	84758	39
22	52063	97470	54593	33161	94341	35150	84493	38
23	52098	97465	54633	33188	94331	35182	84229	37
24	52134	97461	54673	33216	94322	35215	83965	36
25	52170	97456	54713	33243	94312	35248	83701	35
26	52206	97452	54754	33270	94302	35280	83438	34
27	52242	97448	54794	33298	94293	35313	83176	33
28	52278	97443	54834	33325	94283	35346	82914	32
29	52313	97439	54874	33353	94273	35379	82652	31
30	52349	97434	54914	33380	94264	35411	82391	30
31	52385	97430	54955	33408	94254	35444	82130	29
32	52420	97425	54995	33435	94244	35477	81870	28
33	52456	97421	55035	33462	94234	35510	81610	27
34	52491	97416	55075	33490	94225	35543	81350	26
35	52527	97412	55115	33517	94215	35576	81091	25
36	52562	97407	55155	33545	94205	35608	80833	24
37	52598	97403	55195	33572	94195	35641	80574	23
38	52633	97398	55235	33599	94186	35673	80316	22
39	52669	97394	55275	33627	94176	35706	80059	21
40	52704	97389	55314	33654	94166	35739	79801	20
41	52739	97385	55354	33682	94156	35772	79545	19
42	52775	97380	55394	33709	94147	35805	79289	18
43	52810	97376	55434	33736	94137	35838	79033	17
44	52845	97371	55474	33764	94127	35870	78778	16
45	52880	97367	55513	33791	94117	35903	78523	15
46	52916	97362	55553	33819	94107	35936	78269	14
47	52951	97358	55593	33846	94097	35969	78014	13
48	52986	97353	55632	33873	94088	36002	77760	12
49	53021	97348	55672	33901	94078	36035	77507	11
50	53056	97344	55712	33928	94068	36067	77254	10
51	53091	97339	55751	33955	94058	36100	77001	9
52	53126	97335	55791	33983	94048	36133	76749	8
53	53161	97330	55830	34010	94038	36166	76498	7
54	53196	97326	55870	34037	94028	36199	76246	6
55	53231	97321	55909	34065	94018	36232	75996	5
56	53266	97316	55949	34092	94008	36265	75745	4
57	53300	97312	55988	34119	93999	36298	75495	3
58	53335	97307	56027	34147	93989	36331	75245	2
59	53370	97303	56067	34174	93979	36364	74996	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	70°

20°	L. Sin.	L. Cos	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,53405	9,97298.	9,56106.	0,34202	0,93969·	0,36397	2,74747:	60
1	53439.	97293:	56145:	34229·	93959·	36429.	74499	59
2	53474.	97289	56185	34256.	93949·	36462.	74251	58
3	53509	97284.	56224·	34284	93939·	36495.	74003.	57
4	53543.	97280	56263.	34311	93929·	36528.	73756	56
5	53578	97275.	56302:	34338.	93919·	36561.	73509·	55
6	53612.	97270:	56341:	34365:	93909·	36594.	73262.	54
7	53647	97266	56381	34393	93899	36627:	73016.	53
8	53681.	97261.	56420·	34420.	93889	36660.	72771	52
9	53716	97257	56459·	34447:	93879	36693.	72525.	51
10	53750.	97252·	56498·	34475	93869	36726:	72280:	50
11	53785	97247.	56537·	34502.	93859	36759:	72036	49
12	53819·	97243	56576	34529:	9 849	36792:	71792	48
13	53853.	97238·	56615	34557	93839	36825:	71548·	47
14	53888	97233.	56654	34584·	93829	36858:	71304.	46
15	53922·	97229	56693	34611.	93819	36891:	71061.	45
16	53956.	97224·	56732	34638;	93809	36924:	70819	44
17	53990:	97219.	56770.	34666	93798.	36958	70576.	43
18	54024:	97215	56809.	34693.	93788.	36991·	70335	42
19	54059	97210·	56848.	34720:	93778.	37024·	70093.	41
20	54093·	97205.	56887	34748	93768.	37057·	69852.	40
21	54127·	97201	56926	34775·	93758.	37090·	69611:	39
22	54161·	97196·	56964.	34802.	93748	37123·	69371	38
23	54195·	97191.	57003.	34829:	93738	37156.	69131·	37
24	54229	97187	57042	34857	93728	37189:	68891.	36
25	54263	97182·	57080.	34884·	93718	37222:	68652.	35
26	54297	97177.	57119.	34911.	93707.	37255:	68413:	34
27	54331	97172:	57158	34938:	93697.	37289	68175	33
28	54364.	97168	57196.	34966	93687.	37322·	67937	32
29	54398.	97163·	57235	34993·	93677	37355·	67699.	31
30	54432.	97158.	57273.	35020.	93667	37388·	67462	30
31	54466	97154	57312	35047:	93657	37421.	67225·	29
32	54500	97149·	57350.	35075	93646.	37454:	66988.	28
33	54533.	97144.	57389	35102·	93636.	37487:	66752	27
34	54567	97139:	57427.	35129.	93626	37521	66516·	26
35	54601	97135	57466	35156:	93616	37554·	66280.	25
36	54634.	97130·	57504·	35184	93605.	37587.	66045.	24
37	54668	97125.	57542.	35211·	93595.	37620:	65810:	23
38	54701.	97120:	57581	35238.	93585	37653:	65576	22
39	54735	97116	57619·	35265:	93575	37687	65342	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	69°

20°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,54768.	9,97111·	9,57657.	0,35293	0,93564.	0,37720·	2,65108.	20
41	54802	97106.	57695:	35320·	93554.	37753.	64875	19
42	54835.	97101:	57734	35347·	93544	37786:	64642·	18
43	54869	97097	57772·	35374.	93534	37820	64409.	17
44	54902.	97092·	57810·	35401:	93523.	37853·	64177	16
45	54936	97087·	57848.	35429	93513:	37886.	63945·	15
46	54969·	97082.	57886:	35456	93503	37919:	63713.	14
47	55002.	97077:	57924:	35483.	93492.	37953	63482.	13
48	55035:	97073	57962:	35510:	93482.	37986.	63251:	12
49	55069	97068·	58000:	35537:	93472	38019.	63021	11
50	55102·	97063·	58038:	35565	93461.	38053	62791	10
51	55135.	97058.	58076.	35592·	93451.	38086·	62561·	9
52	55168:	97053:	58114.	35619·	93441	38119.	62331.	8
53	55201:	97049	58152.	35646.	93430.	38152:	62102.	7
54	55234:	97044·	58190.	35673:	93420	38186	61874	6
55	55268	97039·	58228.	35700:	93410	38219.	61645:	5
56	55301·	97034.	58266.	35728	93399.	38252:	61417.	4
57	55334·	97029:	58304	35755·	93389	38286	61189:	3
58	55367	97024:	58342	35782·	93378.	38319.	60962.	2
59	55399.	97020	58379.	35809.	93368	38353	60735.	1
21°								69°
0′	9,55132.	9,97015·	9,58417.	0,35836:	0,93358	0,38386·	2,60508:	60′
1	55165.	97010·	58455	35863:	93347.	38419.	60282.	59
2	55198.	97005·	58493	35891	93337	38453	60056:	58
3	55531.	97000.	58530.	35918·	93326.	38486.	59830:	57
4	55564	96995:	58568.	35945·	93316	38519:	59605.	56
5	55597	96990:	58606	35972.	93305.	38553	59380:	55
6	55629.	96986	58643.	35999:	93295	38586.	59156	54
7	55662.	96981·	58681	36026:	93284.	38620	58931.	53
8	55695	96976·	58719	36053:	93274	38653.	58707:	52
9	55727.	96971·	58756.	36081	93263.	38687	58484	51
10	55760.	96966·	58794	36108·	93253	38720.	58260.	50
11	55793	96961.	58831.	36135·	93242.	38753:	58037:	49
12	55825.	96956:	58869	36162·	93232	38787	57815	48
13	55858	96951:	58906.	36189.	93221.	38820.	57593	47
14	55890.	96946:	58944	36216:	93211	38854	57371·	46
15	55923	96941:	58981·	36243:	93200.	38887.	57149.	45
16	55955.	96937	59018.	36270:	93190	38921	56928	44
17	55988	96932·	59056	36298	93179.	38954.	56707·	43
18	56020.	96927·	59093.	36325·	93169	38988	56486.	42
19	56053	96922·	59130:	36352·	93158.	39021.	56266	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	68°

21°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,56085·	9,96917·	9,59168	0,36379·	0,93147:	0,39055	2,56046·	40
21	56117.	96912·	59205·	36406·	93137	39088.	55826.	39
22	56150	96907·	59242.	36433.	93126.	39122	55607.	38
23	56182·	96902.	59279:	36460:	93116	39156	55388:	37
24	56214.	96897:	59317	36487:	93105.	39189.	55169:	36
25	56246:	96892:	59354·	36514:	93094:	39223	54951.	35
26	56279	96887:	59391·	36541:	93084	39256.	54733.	34
27	56311·	96882:	59428.	36568:	93073.	39290	54515:	33
28	56343·	96877:	59465.	36595:	93063	39323.	54298.	32
29	56375·	96872:	59502:	36623	93052·	39357	54081.	31
30	56407.	96867:	59539:	36650·	93041.	39391	53864:	30
31	56439:	96862:	59576:	36677·	93031	39424.	53648	29
32	56471:	96857:	59613:	36704·	93020·	39458	53432	28
33	56503.	96852:	59650.	36731·	93009.	39491.	53216.	27
34	56535.	96847:	59687.	36758·	92999	39525.	53001	26
35	56567.	96842:	59724.	36785·	92988	39559	52785.	25
36	56599	96837.	59761.	36812·	92977.	39592.	52571	24
37	56631	96832.	59798.	36839·	92966:	39626	52356.	23
38	56663	96827.	59835	36866.	92956	39660	52142	22
39	56695	96822.	59872	36893:	92945·	39693.	51929.	21
40	56726.	96817.	59909	36920:	92934.	39727	51715	20
41	56758.	96812.	59945.	36947:	92924	39761	51501.	19
42	56790	96807.	59982.	36974:	92913·	39794.	51288:	18
43	56822	96802.	60019	37001:	92902·	39828.	51076	17
44	56853.	96797.	60056	37028:	92891.	39862	50863.	16
45	56885.	96792.	60092.	37055:	92880:	39895.	50651.	15
46	56917	96787.	60129.	37082:	92870	39929.	50440	14
47	56948.	96782.	60166	37109:	92859·	39963	50228.	13
48	56980	96777.	60202.	37136:	92848.	39997	50017.	12
49	57012	96772	60239.	37163:	92837.	40030.	49807	11
50	57043.	96767	60276	37190.	92826:	40064.	49596.	10
51	57075	96762	60312.	37217:	92816	40098	49386	9
52	57106.	96757	60349	37244.	92805·	40132	49176.	8
53	57138	96752	60385.	37271.	92794·	40165.	48967	7
54	57169·	96747	60422	37298.	92783.	40199.	48757.	6
55	57200.	96742	60458.	37325.	92772:	40233.	48548:	5
56	57232	96736.	60495	37352.	92761:	40267	48340	4
57	57263.	96731·	60531.	37379.	92751	40301	48131.	3
58	57294:	96726.	60568	37406.	92740·	40334.	47923.	2
59	57326	96721.	60604.	37433.	92729·	40368.	47716	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	68°

22°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,57357.	9,96716.	9,60640:	0,37460.	0,92718·	0,40402.	2,47508.	60
1	57388:	96711	60677	37487.	92707·	40436	47301.	59
2	57420	96706	60713.	37514.	92696.	40470	47094:	58
3	57451·	96701	60749:	37541.	92685:	40504	46888	57
4	57482·	96696	60786	37568.	92674:	40538	46681.	56
5	57513.	96691	60822.	37595	92663:	40571.	46475:	55
6	57544:	96685.	60858:	37622	92652:	40605.	46270	54
7	57575:	96680.	60895	37649	92641:	40639.	46064.	53
8	56606:	96675.	60931·	37676	92630:	40673.	45859.	52
9	57637:	96670	60967·	37703	92619:	40707	45655	51
10	57668:	96665	61003.	37730	92609	40741	45450 -	50
11	57699.	96660	61039:	37757	92598·	40775	45246	49
12	57730.	96655	61075:	37784	92587·	40809	45042 -	48
13	57761.	96649.	61111:	37811	92576	40843	44635 =	47
14	57792.	96644.	61148	37837.	92565	40877	44635 -	46
15	57823.	96639.	61184·	37864.	92554	40911	44432 -	45
16	57854.	96634	61220·	37891.	92543	40945	44229 =	44
17	57885	96629	61256·	37918.	92532	40979	44027	43
18	57916	96624	61292	37945.	92520.	41012.	43825	42
19	57946.	96618.	61328	37972.	92509.	41046.	43623	41
20	57977.	96613.	61364	37999	92498.	41080.	43421 -	40
21	58008	96608	61399.	38026	92487.	41114.	43220	39
22	58039	96603	61435.	38053	92476.	41148:	43019.	38
23	58069.	96598	61471.	38080	92465.	41182:	42819:	37
24	58100.	96592.	61507.	38107	92454.	41217	42618	36
25	58131	96587.	61543.	38133.	92443.	41251·	42419	35
26	58161.	96582	61579	38160.	92432	41285·	42219	34
27	58192	96577	61615	38187.	92421	41319·	42018.	33
28	58222.	96571.	61650.	38214.	92410	41353·	41819	32
29	58253	96566.	61686.	38241	92399	41387·	41620	31
30	58283.	96561.	61722	38268	92387.	41421·	41421·	30
31	58314	96556	61758	38295	92376.	41455	41223.	29
32	58344.	96551	61793.	38322	92365.	41489.	41024.	28
33	58375	96545.	61829.	38348.	92354.	41523:	40826:	27
34	58405.	96540.	61865	38375.	92343	41557:	40629	26
35	58436	96535	61900.	38402.	92332	41591:	40431.	25
36	58466.	96530	61936	38429.	92321	41625:	40234.	24
37	58496:	96524.	61972	38456	92309.	41660	40037:	23
38	58527	96519.	62007.	38483	92298.	41694·	39841	22
39	58557·	96514	62043	38510	92287	41728·	39644.	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	67°

L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
9,96508	9,62078	0,38536	0,92276	0,41762	2,39448	20
96503	62114	38563	92265	41796	39253	19
96498	62149	38590	92253	41830	39057	18
96493	62185	38617	92242	41865	38862	17
96487	62220	38644	92231	41899	38667	16
96482	62256	38671	92220	41933	38472	15
96477	62291	38697	92208	41967	38278	14
96471	62326	38724	92197	42001	38084	13
96466	62362	38751	92186	42036	37890	12
96461	62397	38778	92175	42070	37697	11
96456	62432	38805	92163	42104	37503	10
96450	62468	38831	92152	42138	37310	9
96445	62503	38858	92141	42173	37117	8
96440	62538	38885	92130	42207	36925	7
96434	62574	38912	92118	42241	36733	6
96429	62609	38939	92107	42275	36541	5
96424	62644	38965	92096	42310	36349	4
96418	62679	38992	92084	42344	36158	3
96413	62714	39019	92073	42378	35966	2
96407	62750	39046	92061	43413	35775	1
						67°
9,96402	9,62765	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	60
96397	62820	39099	92039	42481	35394	59
96391	62855	39126	92027	42516	35204	58
96336	62890	39153	92916	42550	35014	57
96381	62925	39180	92004	42584	34825	56
96375	62960	39206	91993	42619	34635	55
96370	62995	39233	91982	42653	34446	54
96364	63030	39260	91970	42687	34257	53
96359	63065	39287	91959	42722	34069	52
96354	63100	39313	91947	42756	33880	51
96348	63135	39340	91936	42791	33692	50
96343	63170	39367	91924	42825	33505	49
96337	63205	39394	91913	42860	33317	48
96332	63240	39420	91902	42894	33130	47
96327	63275	39447	91890	42928	32943	46
96321	63309	39474	91879	42963	32756	45
96316	63344	39501	91867	42997	32569	44
96310	63379	39527	91856	43032	32383	43
96305	63414	39554	91844	43066	32197	42
96299	63449	39581	91833	43101	32011	41
L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	66°

22⁰	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,57357.	9,96716.	9,60640:	0,37460.	0,92718˙	0,40402.	2,47508.	60
1	57388:	96711	60677	37487.	92707˙	40436	47301.	59
2	57420	96706	60713.	37514.	92696.	40470	47094:	58
3	57451˙	96701	60749:	37541.	92685:	40504	46888	57
4	57482˙	96696	60786	37568.	92674:	40538	46681.	56
5	57513.	96691	60822.	37595	92663:	40571.	46475:	55
6	57544:	96685.	60858:	37622	92652:	40605.	46270	54
7	57575:	96680.	60895	37649	92641:	40639.	46064.	53
8	56606:	96675.	60931˙	37676	92630:	40673.	45859.	52
9	57637:	96670	60967˙	37703	92619:	40707	45655	51
10	57668:	96665	61003.	37730	92609	40741	45450.	50
11	57699.	96660	61039:	37757	92598˙	40775	45246	49
12	57730.	96655	61075:	37784	92587˙	40809	45042.	48
13	57761.	96649.	61111:	37811	92576	40843	44838:	47
14	57792.	96644.	61148	37837.	92565	40877	44635.	46
15	57823.	96639.	61184˙	37864.	92554	40911	44432.	45
16	57854.	96634	61220˙	37891.	92543	40945	44229:	44
17	57885	96629	61256˙	37918.	92532	40979	44027	43
18	57916	96624	61292	37945.	92520.	41012.	43825	42
19	57946.	96618.	61328	37972.	92509.	41046.	43623	41
20	57977.	96613.	61364	37999	92498.	41080.	43421.	40
21	58008	96608	61399.	38026	92487.	41114.	43220	39
22	58039	96603	61435.	38053	92476.	41148:	43019.	38
23	58069.	96598	61471.	38080	92465.	41182:	42818:	37
24	58100.	96592.	61507.	38107	92454.	41217	42618	36
25	58131	96587.	61543.	38133.	92443.	41251˙	42418	35
26	58161.	96582	61579	38160.	92432	41285˙	42218	34
27	58192	96577	61615	38187.	92421	41319˙	42018.	33
28	58222.	96571.	61650.	38214.	92410	41353˙	41819	32
29	58253	96566.	61686.	38241	92399	41387˙	41620	31
30	58283.	96561.	61722	38268	92387.	41421˙	41421˙	30
31	58314	96556	61758	38295	92376.	41455	41222.	29
32	58344.	96551	61793.	38322	92365.	41489.	41024.	28
33	58375	96545.	61829.	38348.	92354.	41523:	40826:	27
34	58405.	96540.	61865	38375.	92343	41557:	40629	26
35	58436	96535	61900.	38402.	92332	41591:	40431.	25
36	58466.	96530	61936	38429.	92321	41625:	40234.	24
37	58196:	96521.	61972	38456	92309.	41660	40037:	23
38	58527	96519.	62007.	38483	92298.	41694˙	39841	22
39	58557˙	96514	62043	38510	92257	41728˙	39644.	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	67⁰

22°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,58587.	9,96508.	9,62078.	0,38536.	0,92276	0,41762.	2,39448.	20
41	58617:	96503.	62114	38563.	92265	41796:	39253	19
42	58648	96498	62149.	38590.	92253.	41830:	39057.	18
43	58678'	96493	62185	38617	92242.	41865	38862	17
44	58708.	96487.	62220.	38644	92231	41899'	38667.	16
45	58738:	96482.	62256	38671	92220	41933'	38473:	15
46	58768:	96477	62291.	38697.	92208.	41967.	38278.	14
47	58798:	96471.	62326:	38724.	92197.	42001:	38084	13
48	58828:	96466.	62362	38751.	92186	42036	37890.	12
49	58858:	96461	62397.	38778	92175	42070'	37697	11
50	58888:	96456	62432:	38805	92163.	42104.	37503.	10
51	58918.	96450.	62468	38831.	92152	42138:	37310.	9
52	58948.	96445	62503.	38858.	92141	42173	37117:	8
53	58978.	96440	62538:	38885.	92130.	42207'	36925	7
54	59008.	96434.	62574	38912	92118.	42241.	36733	6
55	59038.	96429	62609'	38939	92107	42275:	36541'	5
56	59068.	96424	62644.	38965.	92096.	42310	36349'	4
57	59098	96418.	62679:	38992.	92084.	42344.	36158	3
58	59128	96413	62714:	39019.	92073	42378:	35966.	2
59	59158	96407.	62750	39046	92061.	42413	35775:	1
23°								67°
0′	9,59187.	9,96402.	9,62785'	0,39073	0,92050	0,42447'	2,35585	60′
1	59217.	96397	62820'	39099.	92039	42481.	35394.	59
2	59247	96391.	62855'	39126.	92027.	42516	35204.	58
3	59276.	96386.	62890'	39153	92016	42550.	35014:	57
4	59306.	96381	62925.	39180	92004.	42584:	34825	56
5	59336.	96375.	62960:	39206.	91993.	42619	34635.	55
6	59365.	96370	62995:	39233.	91982	42653.	34446.	54
7	59395.	96364.	63030.	39260	91970.	42687:	34257:	53
8	59425	96359.	63065.	39287	91959	42722	34069	52
9	59454.	96354	63100.	39313.	91947.	42756.	33880.	51
10	59484	96348.	63135	39340.	91936	42791	33692.	50
11	59513.	96343	63170	39367	91924.	42825.	33505	49
12	59543	96337.	63205	39394	91912.	42860	33317	48
13	59572.	96332.	63240	39420.	91902	42894'	33130	47
14	59602	96327	63275	39447.	91890.	42928.	32943	46
15	59631.	96321.	63309.	39474	91879	42963	32756'	45
16	59660:	96316	63344.	39501	91867.	42997.	32569.	44
17	59690	96310.	63379	39527.	91856	43032	32383	43
18	59719.	96305	63414	39554.	91844.	43066.	32197	42
19	59748:	96299.	63449	39581	91833	43101	32011.	41
′	L.Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	66°

23°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,59778	9,96294	9,63483	0,39608	0,91821	0,43135	2,31826	40
21	59807	96289	63518	39634	91810	43170	31640	39
22	59836	96283	63553	39661	91798	43204	31455	38
23	59866	96278	63587	39688	91787	43239	31270	37
24	59895	96272	63622	39714	91775	43273	31086	36
25	59924	96267	63657	39741	91763	43308	30902	35
26	59953	96261	63691	39768	91752	43342	30718	34
27	59982	96256	63726	39794	91740	43377	30534	33
28	60011	96250	63761	39821	91729	43412	30350	32
29	60040	96245	63795	39848	91717	43446	30167	31
30	60069	96239	63830	39874	91706	43481	29984	30
31	60099	96234	63864	39901	91694	43515	29801	29
32	60128	96228	63899	39928	91683	43550	29618	28
33	60157	96223	63933	39954	91671	43585	29436	27
34	60186	96217	63968	39981	91659	43619	29254	26
35	60214	96212	64002	40008	91647	43654	29073	25
36	60243	96206	64037	40034	91636	43688	28890	24
37	60272	96201	64071	40061	91624	43723	28709	23
38	60301	96195	64105	40088	91612	43758	28528	22
39	60330	96190	64140	40114	91601	43792	28347	21
40	60359	96184	64174	40141	91589	43827	28166	20
41	60388	96179	64209	40168	91577	43862	27986	19
42	60416	96173	64243	40194	91566	43896	27806	18
43	60445	96167	64277	40221	91554	43931	27626	17
44	60474	96162	64312	40248	91542	43966	27446	16
45	60503	96156	64346	40274	91531	44001	27267	15
46	60531	96151	64380	40301	91519	44035	27088	14
47	60560	96145	64414	40327	91507	44070	26909	13
48	60589	96140	64449	40354	91495	44105	26730	12
49	60617	96134	64483	40381	91484	44140	26551	11
50	60646	96129	64517	40407	91472	44174	26373	10
51	60675	96123	64551	40434	91460	44209	26195	9
52	60703	96117	64585	40460	91448	44244	26017	8
53	60732	96112	64619	40487	91437	44279	25840	7
54	60760	96106	64653	40514	91425	44313	25662	6
55	60789	96101	64688	40540	91413	44348	25485	5
56	60817	96095	64722	40567	91401	44383	25308	4
57	60846	96089	64756	40593	91390	44418	25132	3
58	60874	96084	64790	40620	91378	44453	24955	2
59	60902	96078	64824	40647	91366	44488	24779	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	66°

24°	L. Sin.	L. Cos	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot	′
0′	9,60931	9,96073	9,64858	0,40673.	0,91354.	0,44522.	2,24603:	60
1	60959.	96067·	64892	40700	91342:	44557.	24427:	59
2	60988	96061.	64926	40726.	91330:	44592.	24252	58
3	61016·	96056	64960	40753	91319	44627	24077	57
4	61044.	96050·	64994	40779.	91307·	44662	23902	56
5	61072:	96044.	65028	40806	91295·	44697	23727.	55
6	61101	96039	65061.	40833	91283·	44732	23552.	54
7	61129·	96033.	65095.	40859.	91271.	44767	23378	53
8	61157.	96027:	65129.	40886	91259:	44801.	23204	52
9	61185:	96022	65163.	40912.	91247:	44836.	23030·	51
10	61213:	96016.	65197	40939	91235:	44871.	22856.	50
11	61242	96010:	65231	40965.	91223:	44906.	22683	49
12	61270·	96005	65265	40992	91212	44941.	22510	48
13	61298·	95999.	65298.	41018.	91200·	44976.	22337	47
14	61326·	95993:	65332.	41045	91188·	45011.	22164·	46
15	61354·	95988	65366	41071.	91176·	45046.	21991.	45
16	61382·	95982·	65400	41098	91164·	45081.	21819	44
17	61410.	95976.	65433.	41124.	91152·	45116.	21647	43
18	61438	95971	65467	41151	91140·	45151:	21475·	42
19	61466	95965·	65501	41177.	91128·	45186:	21303.	41
20	61494	95959.	65534:	41204	91116·	45221:	21132	40
21	61522	95953:	65568	41230.	91104·	45256:	20961	39
22	61550	95948	65602	41257	91092	45291:	20790	38
23	61578	95942·	65635.	41283.	91080	45326:	20619·	37
24	61605.	95936.	65669	41310	91068	45362	20448.	36
25	61633.	95931	65702.	41336.	91056	45397·	20278	35
26	61661.	95925·	65736	41363	91044	45432·	20108	34
27	61689	95919.	65769.	41389.	91032	45467·	19938·	33
28	61717	95913:	65803	41416	91020	45502·	19768.	32
29	61744.	95908	65836.	41442.	91008	45537.	19599	31
30	61772.	95902·	65870	41469	90996	45572:	19429.	30
31	61800	95896.	65903.	41495.	90984	45607:	19260.	29
32	61828	95890:	65937	41522	90971.	45642:	19092	28
33	61855.	95884:	65970.	41548.	90959.	45678	18923·	27
34	61883	95879	66004	41575	90947.	45713·	18755	26
35	61911	95873·	66037.	41601.	90935.	45748·	18586.	25
36	61938.	95867.	66070:	41628	90923.	45783.	18418:	24
37	61966	95861:	66104	41654.	90911	45818:	18251	23
38	61993.	95856	66137.	41680:	90899	45853:	18083.	22
39	62021	95850·	66171	41707	90887	45889	17916	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	65°

24°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,62048.	9,95844·	9,66204·	0,41733.	0,90875	0,45924·	2,17749	20
41	62076	95838.	66237.	41760	90862.	45959.	17582·	19
42	62103.	95832:	66270:	41786.	90850.	45994:	17415.	18
43	62131	95827	66304	41813	90839.	46030	17249	17
44	62158.	95821·	66337·	41839.	90826	46065·	17082.	16
45	62186	95815·	66370.	41865:	90814	46100.	16916:	15
46	62213.	95809.	66403:	41892	90802	46135:	16750:	14
47	62240:	95803:	66437	41918.	90789.	46171	16585	13
48	62268	95797:	66470·	41945	90777.	46206·	16419.	12
49	62295.	95792	66503·	41971.	90765.	46241.	16254.	11
50	62322:	95786·	66536.	41998	90753	46277	16089.	10
51	62350	95780·	66569.	42024·	90741	46312·	15924:	9
52	62377·	95774.	66602:	42050.	90728.	46347.	15760	8
53	62404.	95768:	66635:	42077	90716.	46383	15595.	7
54	62431:	95762:	66669	42103.	90704	46418·	15431.	6
55	62459	95756:	66702·	42129:	90692	46453.	15267.	5
56	62486·	95751	66735·	42156	90679.	46489	15103:	4
57	62513·	95745·	66768·	42182.	90667.	46524.	14940	3
58	62540·	95739·	66801·	42209	90655	46559:	14776.	2
59	62567:	95733·	66834	42235·	90643	46595	14613.	1
25°								65°
0′	9,62594:	9,95727.	9,66867	0,42261.	0,90630.	0,46630.	2,14450:	60′
1	62621:	95721:	66900	42288	90618	46666	14287:	59
2	62648:	95715:	66933	42314.	90606	46701.	14125	58
3	62676	95709:	66966	42340:	90593.	46737	13963	57
4	62703·	95703:	66999	42367	90581.	46772.	13800.	56
5	62730	95698	67031.	42393.	90569	46807:	13638:	55
6	62757	95692·	67064.	42419:	90556.	46843	13477	54
7	62783.	95686·	67097.	42446	90544.	46878.	13315.	53
8	62810.	95680·	67130.	42472.	90532	46914	13154	52
9	62837.	95674·	67163	42498:	90519.	46949.	12993	51
10	62864.	95668·	67196	42525	90507	46985	12832·	50
11	62891.	95662.	67229	42551.	90495	47020.	12671·	49
12	62918	95656:	67261.	42577:	90482.	47056	12510.	48
13	62945	95650:	67294.	42604	90470	47091.	12350	47
14	62972	95644:	67327	42630.	90457.	47127.	12190	46
15	62998.	95638:	67360	42656:	90445.	47163	12030·	45
16	63025.	95632:	67392.	42693	90433	47198.	11870.	44
17	63052	95626:	67425.	42709·	90420.	47234	11711	43
18	63079	95620:	67458	42735.	90408	47269.	11551.	42
19	63105.	95614:	67491	42762	90395.	47305	11392	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	64°

25°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,63132.	9,95608:	9,67523.	0,42788·	0,90383	0,47340.	2,11233	40
21	63159	95602:	67556	42814.	90370.	47376.	11074.	39
22	63185.	95596:	67589	42840:	90358	47412	10916	38
23	63212.	95590.	67621.	42867	90346	47447.	10757.	37
24	63239	95584.	67654	42893.	90333.	47483	10599.	36
25	63265.	95578.	67686.	42919:	90321.	47519	10441.	35
26	62392	95572.	67719	42946	90308.	47554.	10283:	34
27	63318.	95566.	67752	42972·	90296	47590	10126	33
28	63345	95560.	67784.	42998.	90283.	47626	09969.	32
29	63371.	95554.	67817	43024:	90271	47661.	09811	31
30	63398	95548.	67849.	43051	90258.	47697.	09654	30
31	63424.	95542:	67882	43077	90246	47733	09497.	29
32	63451	95536.	67914.	43103.	90233·	47768.	09340:	28
33	63477.	95530.	67947	43129:	90220.	47804.	09184	27
34	63504	95524.	67979.	43156	90208	47840	09028	26
35	63530.	95518.	68011:	43182·	90195.	47876	08872	25
36	63556:	95512.	68044	43208.	90183	47911.	08716·	24
37	63583	95506.	68076.	43234:	90170.	47947.	08560·	23
38	63609.	95500	68109	43261	90158	47983.	08404.	22
39	63636	95494	68141.	43287·	90145.	48019	08249.	21
40	63662·	95488	68173:	43313·	90132:	48055	08094	20
41	63688.	95482	68206	43339.	90120	48090.	07939·	19
42	63714:	95476	68238.	43365:	90107.	48126.	07784.	18
43	63741	95470	68270.	43392	90095	48162.	07630	17
44	63767·	95464	68303	43418·	90082·	48198	07475.	16
45	63793.	95457.	68335.	43444.	90069.	48234	57321	15
46	63819:	95451.	68367:	43470:	90057.	48270	07167	14
47	63845:	95445.	68400	43496:	90044.	48306	07013.	13
48	63871:	95439.	68432·	43523	90031:	48341.	06859:	12
49	63898	95433.	68464.	43549·	90019	48377.	06706	11
50	63924·	95427	68496:	43575·	90006.	48413.	06553	10
51	63950·	95421	68529	43601.	89993:	48449.	06400	9
52	63976·	95415	68561·	43627:	89981	48485.	06247·	8
53	64002·	95409	68593·	43654	89968·	48521	06094·	7
54	64028:	95402.	68625.	43680.	89955.	48557	05941.	6
55	64054·	95396.	68657:	43706·	89943	48593	05789.	5
56	64080	95390.	68689:	43732.	89930·	48629	05637	4
57	64106	95384	68721:	43758:	89917.	48665	05485	3
58	64132	95378	68754	43784:	89904:	48701	05333·	2
59	64158	95372	68786·	43810:	89892	48737	05181.	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	64°

26°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
0'	9,64184	9,95366	9,68818·	0,43837	0,89879·	0,48773	2,05030	60
1	64210	95359.	68850·	43863·	89866.	48809·	04879	59
2	64235.	95353.	68882·	43889·	89853:	48845·	04728	58
3	64261.	95347.	68914·	43915.	89841	48881·	04577·	57
4	64287.	95341	68946·	43941:	89828·	48917·	04426·	56
5	64313	95335	68978	43967:	89815.	48953·	04275.	55
6	64339	95328.	69010	43993:	89802:	48989·	04125	54
7	64365	95322.	69042	44020	89789:	49025.	03975	53
8	64390.	95316.	69074	44046·	89777	49061:	03825	52
9	64416.	95310	69106	44072·	89764·	49097:	03675·	51
10	64442	95304	69138	44098·	89751.	49133:	03525.	50
11	64467.	95297.	69169.	44124·	89738:	49169:	03376	49
12	64493.	95291.	69201.	44150.	89725:	49206	03226.	48
13	64519	95285.	69233.	44176:	89712:	49242·	03077.	47
14	64544.	95279	69265.	44202:	89700	49278·	02928.	46
15	64570.	95273	69297.	44228:	89687·	49314.	02779:	45
16	64596	95266.	69329	44254:	89674·	49350:	02631	44
17	64621.	95260.	69361	44281	89661.	49386:	02482.	43
18	64647	95254	69392.	44307·	89648:	49423	02334.	42
19	64672.	95248	69424.	44333·	89635:	49459·	02186.	41
20	64698	95241.	69456.	44359·	89622:	49495·	02038:	40
21	64723.	95235.	69488	44385·	89609:	49531.	01890:	39
22	64749	95229	69520	44411·	89597	49567:	01743	38
23	64774.	95223	69551.	44437·	89584·	49604	01595.	37
24	64800	95216.	69583.	44463.	89571·	49640·	01448.	36
25	64825.	95210.	69615	44489:	89558·	49676.	01301.	35
26	64851	95204	69646.	44515:	89545·	49712:	01154:	34
27	64876.	95197.	69678.	44541:	89532·	49749	01008	33
28	64902	95191.	69710	44567:	89519·	49785.	90861.	32
29	64927·	95185	69741.	44593:	89506·	49821:	00715	31
30	64952.	95179	69773.	44619:	89493·	49858	00568.	30
31	64978	95172.	69805	44645:	89480·	49894·	00422.	29
32	65003·	95166.	69836.	44671:	89467·	49930.	00277	28
33	65028.	95160	69868	44697:	89454	49967	00131·	27
34	65053:	95153.	69900	44723:	89441	50003.	1,99985.	26
35	65079	95147.	69931.	44749:	89428	50039:	99840.	25
36	65104·	95141	69963	44775:	89415	50076	99695	24
37	65129.	95134.	69994.	44801:	89402	50112.	99550	23
38	65154:	95128.	70026	44827.	89389	50149	99405.	22
39	65180	95122	70057.	44853.	89376	50185·	99260:	21
'	L.Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	63°

26°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
40'	9,65205	9,95115.	9,70089	0,44879.	0,89363	0,50221.	1,99116	20
41	65230	95109.	70120.	44905.	89350	50258	98972	19
42	65255	95103	70152	44931.	89337	50294.	98827.	18
43	65280.	95096.	70183.	44957.	89324	50331	98683.	17
44	65305:	95090	70215	[illegible]	89310.	50367.	98540	16
45	65330:	95084	70246.	45009.	89297.	50404	98396	15
46	65355:	95077.	70278	45035.	89284.	50440.	98252.	14
47	65380:	95071	70309	45061.	89271.	50477	98109.	13
48	65405:	95064.	70340.	45087.	89258.	50513.	97966	12
49	65430.	95058.	70372	45113.	89245	50550	97823	11
50	65455.	95052	70403.	45139.	89232	50586.	97680.	10
51	65480.	95045.	70434:	45165.	89219	50623	97537:	9
52	65505.	95039	70466	45191.	89206	50659.	97395	8
53	65530.	95033	70497.	45217.	89192.	50696	97252.	7
54	65555.	95026.	70528:	45243	89179.	50732.	97110.	6
55	65580	95020	70560	45269	89166.	50769	96968.	5
56	65605	95013.	70591.	45295	89153	50806	96826:	4
57	65630	95007	70622:	45321	89140	50842.	96685	3
58	65655	95000.	70654	45347	89127	50879	96543.	2
59	65679.	94994.	70685	45373	89113.	50915.	96402	1
27°								63°
0'	9,65704.	9,94988	9,70716.	0,45399	0,89100.	0,50952.	1,96261	60'
1	65729	94981.	70747:	45424.	89087	50989	96119.	59
2	65754	94975	70779	45450.	89074	51025.	95979	58
3	65778.	94968.	70810	45476.	89061	51062.	95838	57
4	65803.	94962	70841	45502.	89047.	51099	95697.	56
5	65828	94955.	70872.	45528.	89034.	51135.	95557	55
6	65853	94949	70903:	45554	89021	51172.	95417	54
7	65877.	94942.	70934:	45580	89008	51209	95277	53
8	65902	94936	70966	45606	88994.	51246	95137	52
9	65927	94929.	70997	45632	88981	51282.	94997	51
10	65951.	94923	71028	45658	88968	51319	94857.	50
11	65976	94917	71059	45683.	88954.	51356	94718	49
12	66000.	94910.	71090	45709.	88941.	51393	94578.	48
13	66025	94904	71121	35735.	88928	51429.	94439.	47
14	66050	94897.	71152.	45761.	88915	51466.	94300.	46
15	66074.	94891	71183:	45787	88901.	51503	94161:	45
16	66099	94884	71214:	45813	88888	51540	94023	44
17	66123.	94877.	71245:	45839	88875	51577	93884.	43
18	66148	94871	71276.	45864.	88861.	51613.	93746	42
19	[illegible]	94864.	71307.	46890.	88848	51650.	93608	41
'	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	62°

27°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
20'	9,66197	9,94858	9,71338.	0,45916.	0,88835	0,51687.	1,93470	40
21	66221·	94851.	71369.	45942	88821.	51724	93332·	39
22	66245.	94845	71400.	45968	88808	51761	93194.	38
23	66270	94838.	71431	45994	88794.	51798	93056:	37
24	66294.	94832	71462	46019.	88781.	51835	92919.	36
25	66319	94825.	71493	46045.	88768	51871.	92782	35
26	66343·	94819	71524	46071.	88754.	51908.	92645	34
27	66367.	94812.	71555	46097	88741	51945.	92508·	33
28	66391:	94806	71585.	46123	88727.	51982.	92371·	32
29	66416	94799·	71616.	46149	88714.	52019.	92234.	31
30	66440.	94792.	71647.	46174.	88701	52056.	92098	30
31	66464:	94786	71678.	46200.	88687.	52093.	91961.	29
32	66489	94779.	71709	46226	88674	52130.	91825.	28
33	66513	94773	71740	46252	88660.	52167.	91689.	27
34	66537·	94766.	71770.	46278	88647	52204:	91553.	26
35	66561.	94759:	71801.	46303.	88633.	52241:	91417:	25
36	66585:	94753	71832.	46329.	88620	52278:	91282	24
37	66610	94746.	71863	46355	88606.	52315:	91146.	23
38	66634·	94740	71894	46381	88593	52352:	91011.	22
39	66658·	94733.	71924.	46406.	88579.	52389:	90876	21
40	66682·	94726:	71955	46432.	88566	52426:	90741	20
41	66706·	94720	71986	46458	88552.	52464	90606.	19
42	66730.	94713.	72016.	46484	88539	52501·	90471:	18
43	66754:	94707	72047.	46509.	88525.	52538·	90337	17
44	66778:	94700·	72078	46535.	88512	52575·	90202.	16
45	66802:	94693.	72108.	46561	88498.	52612.	90068.	15
46	66826.	94687	72139.	46587	88485	52649:	89934.	14
47	66850.	94680	72170	46612.	88471.	52686:	89800:	13
48	66874.	94673·	72200.	46638.	88458	52724	89666:	12
49	66898.	94667	72231	46664	88444.	52761·	89533	11
50	66922	94660·	72262	46690	88430:	52798·	89399.	10
51	66946	94653.	72292.	46715.	88417	52835.	89266	9
52	66970	94647	72323	46741.	88403.	52872:	89133	8
53	66994	94640·	72353.	46767	88390	52910	89000	7
54	67018	94633.	72384	46792.	88376.	52947·	88867·	6
55	67041.	94627	72414.	46818.	88362:	52984.	89734.	5
56	67065.	94620·	72445	46844	88349	53021:	68601.	4
57	67089.	94613.	72475.	46970	88335.	53059	89469	3
58	67113	94606:	72506	46995.	88322	53096·	88336.	2
59	67137	94600	72536.	46921	88308·	53133.	88204.	1
'	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	62°

28°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,67160.	9,94593'	9,72567	0,46947	0,88294.	0,53170:	1,88072.	60
1	67184.	94586.	72597.	46972.	88281	53208	87940.	59
2	67208	94580	72628	46998.	88267'	53245.	87808.	58
3	67232	94573'	72[illegible]58.	47024	88253.	532[illegible]2:	87677	57
4	67255.	94566.	726[illegible]9	47049.	88240	53320	87545.	56
5	67279.	94559:	72719.	47075,	88226'	53357.	87414.	55
6	67303	94553	72750	47101	88212.	53395	87283	54
7	67326.	94546'	72780'	47126.	88198:	53432'	87152	53
8	67350	94539.	72810.	47152.	88185	53469.	87021'	52
9	67374	94532:	72841	47178	88171.	53507	86890.	51
10	67397.	94526	72871.	47203.	88157:	53544.	86760	50
11	67421	94519'	72901:	47229	88144	53582	86629.	49
12	67444.	94512.	72932	47255	88130'	53619.	86499	48
13	67468	94505:	72962.	47280.	88116.	53566:	86369	47
14	67491.	94498:	72992:	47306	88102:	53694	86238.	46
15	67515	94492	73023	47331.	88089	53731.	86109	45
16	67538.	94485'	73053.	47357.	88075'	53769	85979'	44
17	67562	94478.	73083:	47383	88061.	53806.	85849.	43
18	67585.	94471:	73114	47408.	88047:	53844	85720	42
19	67609	94465	73144'	47434	88033:	53881.	85590.	41
20	67632.	94458'	73176.	47460	88020	53919.	85461.	40
21	67656	94451'	73204:	47485.	88006'	53957	85332.	39
22	67679.	94444.	73235	47511	87992.	53994.	85203:	38
23	67703	94437:	73265'	47536.	87978:	54032	85074:	37
24	67726'	94430:	73295'	47562	87964:	54069.	84946	36
25	67749.	94424	73325.	47588	87951	54107	84817.	35
26	67773	94417'	73355:	47613.	87937'	54145	84689	34
27	67796'	94410'	73386	47639	87923'	54182.	84560.	33
28	67819.	94403.	73416'	47664.	87909'	54220	84432.	32
29	67843	94396:	73446'	47690	87895.	54257.	84304:	31
30	67866.	94389:	73476'	47715.	87881:	54295.	84177	30
31	67889.	94382:	73506.	47741	87867:	54333	84049'	29
32	67912:	94376	73536:	47766.	87853:	54370.	83921.	28
33	67936	94369'	73566:	47792.	87840	54408.	83794	27
34	67959'	94362'	73596:	47818	87826'	54446	83667	26
35	67982'	94355'	73626:	47843.	87812'	54484	83539.	25
36	68005.	94348.	73656:	47869	87798'	54521.	83412.	24
37	68028:	94341:	73687	47894.	87784'	54559.	83286	23
38	68051:	94334:	73717'	47920	87770'	54597	83159'	22
39	68075	94327:	73747'	47945.	87756'	54635	83032.	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	61°

28°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,68098·	9,94321	9,73777·	0,47971	0,87742.	0,54672.	1,82906	20
41	68121·	94314·	73807·	47996.	87728:	54710.	82779.	19
42	68144·	94307·	73837	48022	87714:	54748	82653.	18
43	68167·	94300·	73867	48047.	87700:	54786	82527.	17
44	68190·	94293·	73897	48073	87686:	54824	82401:	16
45	68213·	94286·	73927	48098.	87672:	54861.	82275:	15
46	68236.	94279·	73957	48124	87658:	54899.	82150	14
47	68259:	94272.	73986.	48149.	87644.	54937.	82024.	13
48	68282.	94265.	74016.	48175	87630.	54975	81899	12
49	68305	94258:	74046.	48200.	87616.	55013	81774·	11
50	68328	94251:	74076.	48226	87602.	55051	81648.	10
51	68351	94244:	74106.	48251.	87588.	55089	81523.	9
52	68374	94237:	74136.	48277	87574.	55127	81399	8
53	68397	94230:	74166	48302.	87560.	55165	81274.	7
54	68420	94223:	74196	48328	87546	55202.	81149.	6
55	68442.	94216:	74226	48353.	87532	55240.	81025	5
56	68465.	94209:	74255.	48379	87518	55278.	80900.	4
57	68488.	94202:	74285.	48404.	87504	55316.	60776.	3
58	68511.	94195:	74315.	48430	87490	55354.	80652.	2
59	68534	94188:	74345	48455.	87476	55392.	80528:	1
29°								61°
0′	9,68557	9,94181.	9,74375	0,48480:	0,87461.	0,55430:	1,80404:	60′
1	68579.	94174.	74404.	48506	87447.	55468:	80281	59
2	68602.	94167.	74434.	47531.	87433.	55506:	80157.	58
3	68625	94160.	74464.	48557	87419.	55545	80034	57
4	68648	94153.	74494	48582.	87405.	55583·	79910.	56
5	68670.	94146.	74524	48608	87391	55621·	79787.	55
6	68693.	94139.	74553.	48633.	87377	55659·	79664.	54
7	68716	94132.	74583	48658:	87363	55697·	79541:	53
8	68738.	94125.	74613	48684	87348.	55735.	79418:	52
9	68761.	94118.	74642.	48709.	87334.	55773:	79296	51
10	68784	94111.	74672.	48735	87320.	55811:	79173.	50
11	68806.	94104.	74702	48760.	87306	55849:	79051	49
12	68829	94097.	74731.	48785:	87292	55888	78928.	48
13	68852	94090	74761.	48811	87278	55926·	78806.	47
14	68874.	94083	74791	48836.	87263.	55964·	78684.	46
15	68897	94076	74820.	48862	87249.	56002.	78562:	45
16	68919.	94069	74850.	48887.	87235	56040:	78441	44
17	68942	94062	74880	48912:	87221	56079	78319·	43
18	68964.	94055	74909.	48938	87206.	56117·	78197.	42
19	69087	94048	74039	48963.	87192.	56155.	78076.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	60°

29°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,69009.	9,94040.	9,74968.	0,48988:	0,87178	0,56193:	1,77955	40
21	69032	94033.	74998	49014	87164	56232	77834	39
22	69054	94026.	75028	49039.	87149.	56270·	77713	38
23	69077	94019.	75057.	49065	97135.	56308.	77592·	37
24	69099.	94012	75087	49090·	87121	56347	77471·	36
25	69122	94005	75116.	49115.	87107	56385·	77350.	35
26	69144·	93998	75146	49141·	87092.	56423.	77230	34
27	69166.	93991	75175.	49166·	87078.	56462	77109.	33
28	69189	93983.	75205	49191.	87061	56500.	76989.	32
29	69211.	93976.	75234.	49217	87049.	56538:	76869	31
30	69233.	93969.	75264	49242·	87035.	56577	76749	30
31	69256	93962.	75293.	49267.	87021	56615.	76629.	29
32	69278.	93955	75323	49292:	87006.	56654	76509:	28
33	69300.	93948	75352.	49318	86992:	56692.	76390	27
34	69323	93941	75382	49343.	86978	56730:	76270.	26
35	69345·	93933.	75411·	49368:	86963.	56769	76151	25
36	69367.	93926.	75440.	49394	86949	56807.	76031.	24
37	69389:	93919.	75470	49419·	86935	56846	75912.	23
38	69412	93912	75499.	49444.	86920.	56884.	75793.	22
39	69434·	93905	75529	49470	86906	56923	75674.	21
40	69456·	93897.	75558·	49495·	86891.	56961.	75555:	20
41	69478.	93890.	75587.	49520.	86877.	57000	75437	19
42	69500:	93883.	75617	49545:	86863	57038.	75318.	18
43	69522:	93876	75646.	49571	86848.	57077.	75200	17
44	69545	93869	75675:	49596·	86834	57116	75081.	16
45	69567·	93861.	75705	49621.	86819.	57154.	74963.	15
46	69589·	93854.	75734.	49646:	86805	57193	74845.	14
47	69611·	93847	75763:	49672	86790.	57231.	74727:	13
48	69633·	93840	75793	49697·	86776.	57270.	74609:	12
49	69655·	93832.	75822·	49722.	86762	57309	74492	11
50	69677·	93825.	75851.	49747:	86747.	57347.	74374.	10
51	69699·	93818.	75880:	49773	86733	57386	74257	9
52	69721·	93811	75910	49798·	86718.	57425	74139.	8
53	69743	93803.	75939·	49823.	86704	57463.	74022	7
54	69765	93796.	75968.	49848:	86689.	57502.	73905	6
55	69787	93789	75997:	49873:	86675	57541	73788	5
56	69809	93782	76027	49899	86660.	57579.	73671·	4
57	69831	93774.	76056·	49924·	86646	57618.	73554.	3
58	69853	93767.	76085.	49949.	86631.	57657	73438	2
59	69875	93760	76114:	49974:	86617	57696	73321	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	60°

30°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,69897	9,93753	9,76143:	0,50000	0,86602.	0,57735	1,73205	60
1	69918.	93745:	76173	50025	86587:	57773.	73089.	59
2	69940.	93738	76202'	50050'	86573	57812.	72972.	58
3	69962.	93731	76231'	50075.	86558.	57851	72856.	57
4	69984	93723.	76260.	50100:	86544	57890	72740:	56
5	70006	93716.	76289:	50125:	86529.	57929	72624:	55
6	70028	93709	76318:	50151	86515	57967.	72509	54
7	70049.	93701.	76347:	50176'	86500.	58006.	72393'	53
8	70071.	93694.	76377	50201'	86485:	58045.	72277.	52
9	70093	93687	76406'	50226.	86471	58084.	72162.	51
10	70115	93679.	76435'	50251:	86456.	58123.	72047	50
11	70136.	93672.	76464'	50276:	86442	58162	71932	49
12	70158.	93665	76493'	50301:	86427'	58201	71817	48
13	70180	93657.	76522'	50327	86412.	58240	71702'	47
14	70201.	93650	76551'	50352'	86498	58279	71587.	46
15	70223.	93643	76580'	50377'	86383.	58318	71472:	45
16	70245	93635.	76609'	50402.	86368:	58357	71358	44
17	70266.	93628	76638.	50427:	86354	58396	71243.	43
18	70288	93620.	76667.	50452:	86339.	58435'	71129	42
19	70310	93613.	76596.	50477:	86324:	58474'	71015	41
20	70331.	93606	76725	50502:	86310	58513'	70901	40
21	70353	93598.	76754	50528	86295:	58552'	70787	39
22	70374.	93591	76783	50553'	86280.	58591'	70673'	38
23	70396	93584	76812	50578'	86266	58630.	70559.	37
24	70417.	93576.	76841	50603'	86251'	58669:	70445:	36
25	70439	93569	76870	50628'	86236.	58708:	70332	35
26	70460.	93561.	76899	50653.	86221:	58747:	70218.	34
27	70482	93554	76928	50678:	86207	58787	70105.	33
28	70503.	93546.	76957	50703:	86192'	58826'	69992	32
29	70525	93539	76985.	50728:	86177.	58865'	69879	31
30	70546.	93532	77014.	50753:	86162:	58904.	69766'	30
31	70568	93524.	77043.	50778:	86148	58943:	69653'	29
32	70589.	93517	77072.	50803:	86133'	58982:	69540.	28
33	70611	93509.	77101	50829	86118.	59022	69428	27
34	70632.	93502	77130	50854'	86103:	59061'	69315.	26
35	70653:	93494.	77159	50879'	86089	59100.	69203	25
36	70675	93487	77188	50904'	86074'	59139:	69090.	24
37	70696.	93479.	77216.	50929'	86059'	59179	68978.	23
38	70718	93472	77245.	50954'	86044.	59218'	68866	22
39	70739'	93464.	77274	50979'	86029:	59257.	68754'	21
′	L.Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	59°

30°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,70760.	9,93457	9,77303	0,51004·	0,86014:	0,59296:	1,68642.	20
41	70781:	93449.	77332	51029·	86000	59336	68530:	19
42	70803	93442	77360.	51054·	85985·	59375.	68419	18
43	70824·	93434.	77389.	51079·	85970·	59415	68307.	17
44	70845.	93427	77418	51104·	85955.	59454·	68196	16
45	70866:	93419.	77447	51129	85940:	59493.	68084.	15
46	70888	93412	77475.	51154	85925:	59533	67973.	14
47	70909·	93404.	77504.	51179	85910:	59572.	67862.	13
48	70930.	93397	77533	51204	85895:	59611:	67751.	12
49	70951:	93389.	77562	51229	85881	59651	67640:	11
50	70972:	93382	77590.	51254	85866·	59690.	67529:	10
51	70994	93374.	77619	51279	85851·	59730	67419	9
52	71015·	93367	77648	51304	85836·	59769.	67308.	8
53	71036·	93359.	77676.	51329	85821·	59809	67198	7
54	71057.	93352	77705.	51354	85806·	59848.	67087.	6
55	71078:	93344·	77734	51379	85791.	59888	66977.	5
56	71099:	93336.	77762.	51404	85776:	59927.	66867	4
57	71120:	93329	77791	51428.	85761:	59967	66757	3
58	71141:	93321.	77820	51453.	85746:	60006.	66647·	2
59	71162:	93314	77848.	51478.	85731:	60046	66537.	1
31°								59°
0′	9,71183:	9,93306.	9,77877	0,51503.	0,75716:	0,60086	1,66427:	60′
1	71204:	93298:	77905.	51528.	75701:	60125.	66318	59
2	71225:	93291	77934.	51553.	75686:	60165	66208.	58
3	71246.	93283.	77963	51578.	75671.	60204.	66099	57
4	71267.	93276	77991.	51603.	75656.	60244.	65990	56
5	71288.	93268.	78020	51628	85641.	60284	65880.	55
6	71309.	93260:	78048.	51653	85626.	60323.	65771.	54
7	71330.	93253	78077	51678	85611.	60363.	65662:	53
8	71351.	93245.	78106	51703	85596.	60403	65554	52
9	71372.	93238	78134.	51728	85581.	60442.	65445·	51
10	71393	93230·	78163	51752.	85566.	60482.	65336.	50
11	71414	93222.	78191.	51777.	85551	60522	65228	49
12	71435	93215	78220	51802.	85536	60562	65119.	48
13	71456	93207·	78248.	51827.	85521	60601.	65011	47
14	71476.	93199.	78277	51852	85506	60641.	64903	46
15	71497.	93192	78305.	51877	85491	60681	64794.	45
16	71518.	93184·	78334	51902	85476	60721	64686.	44
17	71539	93176.	78362.	51927	85460.	60761	64578:	43
18	71560	93169	78391	51951.	85445.	60800.	64471	42
19	71580.	93161·	78419·	51976.	85430.	60840.	64363·	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	58°

31°	L. Sin.	L. Cós.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,71601	9,93153	9,78447	0,52001	0,85415	0,60880	1,64256	40
21	71622	93146	78476	52026	85400	60920	64148	39
22	71643	93138	78504	52051	85385	60960	64040	38
23	71663	93130	78533	52076	85370	61000	63933	37
24	71684	93122	78561	52100	85355	61040	63826	36
25	71705	93115	78590	52125	85339	61080	63719	35
26	71725	93107	78618	52150	85324	61120	63612	34
27	71746	93099	78646	52175	85309	61160	63505	33
28	71767	93092	78675	52200	85294	61200	63398	32
29	71787	93084	78703	52225	85279	61240	63291	31
30	71808	93076	78731	52249	85264	61280	63185	30
31	71829	93068	78760	52274	85248	61320	63078	29
32	71849	93061	78788	52299	85233	61360	62972	28
33	71870	93053	78816	52324	85218	61400	62865	27
34	71890	93045	78845	52349	85203	61440	62759	26
35	71911	93037	78873	52373	85187	61480	62653	25
36	71931	93030	78901	52398	85172	61520	62547	24
37	71952	93022	78930	52423	85157	61560	62441	23
38	71973	93014	78958	52448	85142	61600	62335	22
39	71993	93006	78986	52472	85126	61640	62230	21
40	72013	92998	79015	52497	85111	61680	62124	20
41	72034	92991	79043	52522	85096	61721	62019	19
42	72054	92983	79071	52547	85081	61761	61913	18
43	72075	92975	79099	52571	85065	61801	61808	17
44	72095	92967	79128	52596	85050	61841	61703	16
45	72116	92959	79156	52621	85035	61881	61598	15
46	72136	92952	79184	52646	85019	61922	61493	14
47	72157	92944	79212	52670	85004	61962	61389	13
48	72177	92936	79241	52695	84989	62002	61283	12
49	72197	92928	79269	52720	84973	62042	61178	11
50	72218	92920	79297	52745	84958	62083	61074	10
51	72238	92912	79325	52769	84943	62123	60969	9
52	72258	92905	79353	52794	84927	62163	60865	8
53	72279	92897	79381	52819	84912	62204	60760	7
54	72299	92889	79410	52843	84897	62244	60656	6
55	72319	92881	79438	52868	84881	62284	60552	5
56	72339	92873	79466	52893	84866	62325	60448	4
57	72360	92865	79494	52917	84851	62365	60344	3
58	72380	92857	79522	52942	84835	62406	60240	2
59	72400	92849	79550	52967	84820	62446	60137	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	58°

32°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,72420:	9,92842	9,79578:	0,52991.	0,84804.	0,62486.	1,60033·	60
1	72441	92834·	79607	53016.	84789	62527	59929.	59
2	72461·	92826·	79635·	53041	84773.	62567.	59826	58
3	72481.	92818·	79663·	53065.	84758.	62608	59723	57
4	72501:	92810·	79691·	53090.	84743	62648.	59619.	56
5	72521:	92802.	79719·	53115	84727.	62689	59516.	55
6	72542	92794:	79747·	53139.	84712	62729.	59413	54.
7	72562·	92786:	79775.	53164.	84696.	62770	59310:	53
8	72582·	92778:	79803:	53189	84681	62810.	59207:	52
9	72602·	92770:	79831:	53213.	84665.	62851.	59105	51
10	72622·	92762:	79859:	53238	84650	62892	59002·	50
11	72642.	92754:	79887:	53263	84634.	62932.	58899.	49
12	72662:	92746:	79915:	53287.	84619	62973	58797	48
13	72682:	92738:	79943:	53312	84603.	63013.	58694.	47
14	72702:	92731	79971.	53336.	84588	63054.	58592.	46
15	72722:	92723·	79999.	53361	84572.	63095	58490	45
16	72742:	92715·	80027.	53386	84557	63135.	58388	44
17	72762.	92707·	80055.	53410.	84541.	63176.	58286	43
18	72782.	92699·	80083.	53435	84526	63217	58184·	42
19	72802.	92691·	80111.	53459.	84510.	63258	58082.	41
20	72822.	92683	80139.	53484	84495	63298.	57980:	40
21	72842.	92675	80167.	53508.	84479.	63339.	57879	39
22	72862.	92667	80195	53533.	84463:	63380	57777.	38
23	72882.	92659	80223	53558	84448	63421	57676	37
24	72902	92651	80251	53582.	84432.	63461.	57574.	36
25	72922	92643	80279	53607	84417	63502.	57473.	35
26	72942	92635	80307	53631.	84401.	63543.	57372	34
27	72962	92627	80335	53656	84386	63584	57271	33
28	72981.	92619	80362.	53680.	84370·	63625	57170	32
29	73001.	92610.	80390.	53705	84354.	63666	57069·	31
30	73021.	92602.	80418.	53729.	84339	63707	56968.	30
31	73041	92594.	80446.	53754	84323.	63747.	56867:	29
32	73061	92586.	80474	53779	84307:	63788.	56767	28
33	73081	92578.	80502	53803.	84292	63829.	56666.	27
34	73100.	92570.	80530	53828	84276.	63870.	56566	26
35	73120.	92562.	80558	53852.	84260:	63911.	56465.	25
36	73140	92554.	805·5.	53877	84245	63952.	56365.	24
37	73160	92546	80613.	53901.	84229.	63993.	56265	23
38	73179.	92538	80641.	53926	84213:	64034:	56165	22
39	73199.	92530	80669	53950.	84198	64075:	56065	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	57°

32°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,73219	9,92522	9,80697	0,53975	0,84182.	0,64116:	1,55965	20
41	73239	92514	80724.	53999.	84166.	64157:	55865:	19
42	73258.	92505.	80752.	54024	84151	64198:	55766	18
43	73278	92497.	80780:	54048.	84135·	64239:	55666·	17
44	73298	92489.	80808	54072:	84119.	64281	55566.	16
45	73317.	92481.	80836	54097	84103:	64322·	55467	15
46	73337	92473	80863.	54121.	84088	64363·	55368	14
47	73356.	92465	80891.	54146	84072·	64404·	55268.	13
48	73376.	92457	80919	54170.	84056.	64445.	55169.	12
49	73396	92449	80947	54195	84040:	64486:	55070	11
50	73415.	92440.	80974.	54219.	84025	64527:	54971:	10
51	73435	92432.	81002.	54244	84009·	64569	54872:	9
52	73454.	92424.	81030	54268.	83993.	64610	54773:	8
53	73474	92416	81057.	54293	83977:	64651.	54675	7
54	73493.	92408	81085.	54317·	83961:	64692:	54576·	6
55	73513	92400	81113	54341.	83946.	64734	54477.	5
56	73532.	92391.	81141	54366	83930·	64775·	54379	4
57	73552	92383.	81168.	54390.	83914.	64816.	54281	3
58	73571.	92375.	81196	54415	83898:	64858	54182.	2
59	73591	92367	81224	54439.	83882:	64899·	54084.	1
33°								57°
0′	9,73610.	9,92359	9,81251.	0,54463:	0,83867	0,64940.	1,53986	60′
1	73630	92350.	81279	54488	83851·	64982	53888	59
2	73649.	92342.	81307	54512.	83835·	65023.	53790.	58
3	73669	92334.	81334.	54537	83819·	65064:	53692:	57
4	73688.	92326	81362	54561·	83803.	65106	53594:	56
5	73707:	92318	81389.	54585.	83787:	65147.	53497	55
6	73727	92309.	81417.	54610	83771:	65189	53399.	54
7	73746.	92301.	81445	54634.	83755:	65230.	53302	53
8	73766	92293	71472.	54658:	83740	65272	53204.	52
9	73785·	92285	81500	54683	83724·	65313.	53107	51
10	73804.	92276.	81527.	54707.	83708·	65355	53010	50
11	73824	92268.	81555.	54731:	83692·	65396.	52913	49
12	73843·	92260	81583	54756	83676·	65438	52816	48
13	73862.	92252	81610.	54780.	83660·	65479.	52719	47
14	73882	92243.	81638	54804:	83644.	65521	52622·	46
15	73901·	92235	81665.	54829	83628:	65562.	52525·	45
16	73920.	92227	81693	54853.	83612:	65604	52428.	44
17	73939:	92218.	81720.	54877:	83596:	65646	52331:	43
18	73959	92210.	81748	54902	83580:	65687.	52235	42
19	73978·	92202	81775.	54926.	83564:	65729	52138.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	56°

3°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,73997·	9,92194	9,81803	0,54950:	0,83548:	0,65771	1,52042.	40
21	74016.	92185.	81830.	54975	83532:	65812.	51946	39
22	74035:	92177	81858	54999·	83516:	65854	51850	38
23	74055	92169	81885.	55023.	83500.	65896	51753.	37
24	74074·	92160.	81913	55048	83484.	65937.	51657.	36
25	74093·	92152	81940.	55072·	83468.	65979.	51562	35
26	74112.	92144	81968	55096.	83452.	66021	51466·	34
27	74131:	92135.	81995.	55120:	83436.	66063	51370·	33
28	74150:	92127	82023	55145	83420.	66104.	51274.	32
29	74169:	92119	82050.	55169·	83404.	66146.	51179	31
30	74188:	92110.	82078	55193.	83388.	66188.	51083.	30
31	74208	92102	82105.	55217:	83372.	66230	50988	29
32	74227·	92093.	82133	55242	83356	66272	50892.	28
33	74246·	92085.	82160.	55266·	83340	66314	50797	27
34	74265·	92077	82188	55290.	83324	66356	50702	26
35	74284·	92068.	82215·	55314:	83308	66397.	50607	25
36	74303·	92060	82242.	55339	83292	66439.	50512	24
37	74322·	92051.	82270	55363·	83276	66481.	50417·	23
38	74341	92043.	82297.	55387.	83259.	66523.	50322·	22
39	74360	92035	82325	55411:	83243.	66565.	50227.	21
40	74379	92026.	82352·	55436	83227.	66607.	50132:	20
41	74398	92018	82379.	55460·	83211.	66649.	50038	19
42	74417	92009.	82407	55484·	83195	66691:	49943.	18
43	74436	92001.	82434.	55508.	83179	66733:	49849	17
44	74454.	91993	82461:	55532:	83163	66775:	49754.	16
45	74473.	91984.	82489	55557	83146.	66817:	49660.	15
46	74492.	91976	82516.	55581·	83130.	66859:	49566	14
47	74511.	91967.	82543:	55605.	83114.	66902	49472	13
48	74530.	91959	82571	55629.	83098	66944·	49378	12
49	74549	91950.	82598.	55653:	83082	66986·	49284·	11
50	74568	91942	82625:	55677:	83066	67028·	49190·	10
51	74587	91933.	82653	55702	83049.	67070.	49096.	9
52	74605.	91925	82680.	55726·	83033.	67112.	49002:	8
53	74624.	91916.	82707:	55750·	83017	67154:	48909	7
54	74643.	91908	82735	55774.	83001	67197	48815.	6
55	74662	91899.	82762·	55798:	82985	67239·	48722	5
56	74681	91891	82789.	55822:	82968.	67281.	48628.	4
57	74699.	91882.	82816:	55846:	82952.	67323:	48535.	3
58	74718.	91874	82844	55871	82936	67366	48442	2
59	74737	91865.	82871·	55895·	82920	67408.	48349	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	56°

34°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
0	9,74756	9,91857	9,82898	0,55919	0,82903	0,67450	1,48256	60
1	74774	91849	82925	55943	82887	67493	48163	59
2	74793	91840	82953	55967	82871	67535	48070	58
3	74812	91831	82980	55991	82854	67577	47977	57
4	74830	91823	83007	56015	82838	67620	47884	56
5	74849	91814	83034	56039	82822	67662	47791	55
6	74868	91806	83062	56063	82806	67705	47699	54
7	74886	91797	83089	56087	82789	67747	47606	53
8	74905	91789	83116	56112	82773	67789	47514	52
9	74924	91780	83143	56136	82757	67832	47422	51
10	74942	91771	83170	56160	82740	67874	47329	50
11	74961	91763	83198	56184	82724	67917	47237	49
12	74990	91754	83225	56208	82708	67959	47145	48
13	74998	91746	83252	56232	82691	68002	47053	47
14	75017	91737	83279	56256	82675	68045	46961	46
15	75035	91729	83306	56280	82658	68087	46869	45
16	75054	91720	83333	56304	82642	68130	46777	44
17	75072	91711	83361	56328	82626	68172	46686	43
18	75091	91703	83388	56352	82609	68215	46594	42
19	75109	91694	83415	56376	82593	68258	46502	41
20	75128	91685	83442	56400	82577	68300	46411	40
21	75146	91677	83469	56424	82560	68343	46320	39
22	75165	91668	83496	56448	82544	68386	46228	38
23	75183	91660	83523	56472	82527	68428	46137	37
24	75202	91651	83550	56496	82511	68471	46046	36
25	75220	91642	83578	56520	82494	68514	45955	35
26	75239	91634	83605	56544	82478	68556	45864	34
27	75257	91625	83632	56568	82462	68599	45773	33
28	75276	91616	83659	56592	82445	68642	45682	32
29	75294	91608	83686	56616	82429	68685	45591	31
30	75312	91599	83713	56640	82412	68728	45500	30
31	75331	91590	83740	56664	82396	68770	45410	29
32	75349	91581	83767	56688	82379	68813	45319	28
33	75367	91573	83794	56712	82363	68856	45229	27
34	75386	91564	83821	56736	82346	68899	45138	26
35	75404	91555	83848	56760	82330	68942	45048	25
36	75422	91547	83875	56784	82313	28985	44958	24
37	75441	91538	83902	56808	82297	69028	44868	23
38	75459	91529	83929	56832	82280	69071	44777	22
39	75477	91521	83956	56856	82264	69114	44687	21
'	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	55°

34°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,75496	9,91512·	9,83983:	0,56880	0,82247.	0,69157	1,44598	20
41	75514·	91503.	84010.	56904	82230:	69200·	44508·	19
42	75532.	91494:	84037.	56927.	82214	69243·	44418·	18
43	75550:	91486	84064.	56951.	82197.	69286·	44328.	17
44	75569	91477·	84091.	56975.	82181	69329·	44238:	16
45	75587·	91468.	84118.	56999.	82164.	69372·	44149	15
46	75605·	91459:	84145.	57023.	82148	69415.	44059.	14
47	75623.	91450:	84172.	57047	82131.	69458:	43970	13
48	75641:	91442	84199.	57071	82114:	69501:	43881	12
49	75659:	91433·	84226.	57095	82098	69544:	43791.	11
50	75678	91424.	84253.	57119	82081.	69588	43702.	10
51	75696·	91415:	84280	57142.	82065	69631·	43613.	9
52	75714·	91407	84307	57166.	82048·	69674.	43524.	8
53	75732.	91398·	84334	57190.	82031.	69717:	43435:	7
54	75750:	91389·	84361	57214.	82015	69760:	43346:	6
55	75768:	91380.	84388	57238	81998.	69804	43257:	5
56	75786:	91371:	84415	57262	81981:	69847·	43169	4
57	75804:	91362:	84441.	57286	81965	69890.	43080·	3
58	75823	91354	84468.	57309.	81948.	69934	42991.	2
59	75841·	91345·	84495.	57333.	81931:	69977·	42903	1
35°								55°
0′	9,75859·	9,91336·	9,84522.	0,57357.	0,81915	0,70020.	1,42814.	60′
1	75877·	91327.	84549.	57381	81898.	70064	42726	59
2	75895·	91318:	84576	57405	81881:	70107·	42638	58
3	75913·	91309:	84603	57429	81865	70150.	42549.	57
4	75931	91301	84630	57452.	81848·	70194	42461.	56
5	75949	91292·	84657	57476.	81831.	70237.	42373.	55
6	75967	91283·	84683.	57500.	81814:	70281	42285.	54
7	75985	91274·	84710.	57524	81798	70324.	42197:	53
8	76003	91265.	84737.	57548	81781.	70368	42109:	52
9	76021	91256:	84764	57571.	81764:	70411.	42021:	51
10	76038.	91247:	84791	57595.	81748	70455	41934	50
11	76056.	91238:	84818	57619	81731·	70498.	41846.	49
12	76074.	91229:	84844.	57643	81714·	70542	41759	48
13	76092.	91220:	84871.	57667	81697.	70585.	41671.	47
14	76110.	91212	84898.	57690.	81680:	70629	41584	46
15	76128.	91203·	84925	57714.	81664	70673	41496.	45
16	76146	91194·	84952	57738	81647·	70716.	41409	44
17	76164	91185·	84978.	57762	81630.	70760	41322	43
18	76182	91176·	85005.	57785.	81613:	70803.	41235	42
19	76199.	91167·	85032.	57809	81596:	70847.	41147.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	54°

35°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,76217.	9,91158·	9,85059	0,57833	0,81580	0,70891	1,41060.	40
21	76235.	91149·	85086	57856.	81563·	70935	40974	39
22	76253	91140.	85112.	57880.	81546·	70978.	40887	38
23	76271	91131:	85139.	57904	81529.	71022.	40800·	37
24	76288.	91122:	85166	57928	81512:	71066	40713.	36
25	76306.	91113:	85193	57951.	81495:	71110	40627	35
26	76324	91104:	85219.	57975.	81479	71153.	40540·	34
27	76342	91095:	85246.	57999	81462·	71197.	40453.	33
28	76359.	91086.	85273	58022.	81445·	71241.	40367	32
29	76377.	91077.	85300	58046.	81428·	71285	40281	31
30	76395	91068.	85326.	58070	81411.	71329	40194.	30
31	76413	91059.	85353.	58093.	81394:	71373	40108.	29
32	76430.	91050.	85380	58117.	81377:	71417	40022	28
33	76448	91041.	85406.	58141	81360:	71461	39936	27
34	76466	91032.	85433.	58164.	81343:	71505	39850	26
35	76483.	91023	85460	58188.	81327	71548.	39764·	25
36	76501	91014	85487	58212	81310·	71592.	39678.	24
37	76519	91005	85513.	58235.	81293·	71636:	39592:	23
38	76536.	90996	85540	58259.	81276·	71681	39506:	22
39	76554	90987	85567	58283	81259·	71725·	39421	21
40	76571.	90978	85593.	58306.	81242·	71769·	39335.	20
41	76589.	90969	85620	58330	81225·	71813·	39250	19
42	76607	90960	85647	58354	81208·	71857·	39164.	18
43	76624.	90950.	85673.	58377.	81191·	71901·	39079	17
44	76642	90941.	85700	58401	81174·	71945.	38994	16
45	76659.	90932.	85727	58424.	81157·	71989:	38908.	15
46	76677	90923.	85753.	58448.	81140	72033:	38823.	14
47	76694.	90914.	85780	58472	81123	72078	38738	13
48	76712	90905.	85806.	58495.	81106	72122·	38653	12
49	76729.	90896	85833.	58519	81089	72166	38568·	11
50	76747	90887	85860	58542.	81072	72210.	38483.	10
51	76764.	90878	85886.	58566.	81055	72255	38398:	9
52	76782	90869	85913	58590	81038	72299·	38313:	8
53	76799.	90859.	85940	58613.	81021	72343.	38229	7
54	76817	90850.	85966.	58637	81004	72387:	38144.	6
55	76834.	90841.	85993	58660.	80987	72432	38060	5
56	76852	90832	86019:	58684	80970	72476.	37975.	4
57	76869.	90823	86046	58707.	80952.	72521	37891	3
58	76887	90814	86072.	58731	80935.	72565·	37806.	2
59	76901·	90804.	86099.	58754.	80918.	72609.	37722	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	54°

36°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,76921.	9,90795.	9,86126	0,58778.	0,80901.	0,72654	1,37638	60
1	76939	90786.	86152.	58802	80884.	72698.	37554	59
2	76956.	90777	86179	58825.	80867	72743	37469.	58
3	76973:	99768	81205.	58849	80850	72787.	37385:	57
4	76991	90759	86232	58872.	80833	72832	37301:	56
5	77008.	90749.	86258.	58896	80816	72876.	37218	55
6	77026	90740.	86285	58919.	80798.	72921	37134·	54
7	77043·	90731	86311.	58943	80781.	72965.	37050·	53
8	77060.	90722	86338	58966.	80764.	73010	36966.	52
9	77077:	90712.	86365	58990	80747.	73055	36883	51
10	77095	90703.	86391.	59013.	80730	73099.	36799.	50
11	77112·	90694	86418	59037	80713	73144	36716	49
12	77129.	90685	86444.	59060.	80696	73188.	36632.	48
13	77147	90675.	86471	59084	80678.	73233.	36549	47
14	77164·	90666.	86497.	59107	80661.	73278	36466	46
15	77181·	90657	86524	59130.	80644	73323	36382.	45
16	77198.	90648	86550.	59154	80627	73367.	36299.	44
17	77215:	90638.	86577	59177.	80610	73412.	36216.	43
18	77233	90629.	86603	59201	80592.	73457	36133	42
19	77250·	90620	86629.	59224.	80575.	73502	36050.	41
20	77267.	90611	86656	59248	80558	73546.	35967:	40
21	77284:	90601.	86682.	59271.	80541	73591.	35884:	39
22	77301:	90592	86709	59295	80523.	73636.	35802	38
23	77318:	90583	86735.	59318·	80506.	73681	35719·	37
24	77336	90573.	86762	59341.	80489	73726	35636.	36
25	77353·	90564.	86788.	59365	80472	73771	35554	35
26	77370·	90555	86815	59388.	80454.	73816	35471.	34
27	77387·	90545.	86841.	59412	80437.	73861	35389	33
28	77404.	90536.	86868	59435	80420	73906	35306.	32
29	77421:	90527	86894·	59458.	80402.	73951	35224	31
30	77438:	90517.	86920.	59482	80385.	73996·	35142	30
31	77455:	90508.	86947	59505.	80368	74041·	35060	29
32	77472:	90499	86973.	59529	80351	74086·	34977.	28
33	77489:	90489.	87000	59552·	80333.	74131·	34895.	27
34	77506:	90480	87026.	59575.	80316	74176·	34813:	26
35	77523:	90471	87052:	59599	80299	74221·	34731.	25
36	77541	90461.	87079	59622·	80281.	74266:	34650	24
37	77558	90452	87105.	59645.	80264	74311:	34568·	23
38	77575	90442.	87132	59669	80247	74356:	34486.	22
39	77591.	90433.	87158·	59692.	80229.	74402	34404:	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	53°

36°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,77608.	9,90424	9,87184.	0,59715:	0,80212	0,74447·	1,34323	20
41	77625.	90414.	87211.	59739	80194.	74492·	34241.	19
42	77642.	90405	87237.	59762.	80177.	74537.	34160	18
43	77659.	90395.	87263:	59785:	80160	74582:	34078.	17
44	77676.	90336	87290	59809	80142.	74628	33997.	16
45	77693.	90377	87316.	59832·	90125	74673.	33916	15
46	77710.	90367.	87343	59855.	80107.	74718:	33835	14
47	77727.	90358	87369·	59879	80090.	74764	33753.	13
48	77744	90348.	87395.	59902·	80073	74809.	33672.	12
49	77761	90339	87422	59925.	80055.	74854:	33591.	11
50	77778	90329.	87448·	59948:	80038	74900	33510:	10
51	77795	90320	87474.	59972	80020.	74945.	33429:	9
52	77811.	90310.	87501	59995·	80003	74991	33348:	8
53	77828.	90301	87527·	60018.	79985.	75036.	33268	7
54	77845.	90291.	87553.	60042	79968	75082	33187·	6
55	77862	90282	87579:	60065·	79950.	75127.	33106.	5
56	77879	90272.	87606	60088.	79933.	75173	33026	4
57	77895.	90263	87632.	60111:	79916	75218.	32945.	3
58	77912.	90253.	87658:	60135	79898.	75264	32865	2
59	77929.	90244	87685	60158·	79881	75309.	32784.	1
37°								53°
0′	9,77946	9,90234.	9,87711·	0,60181.	0,79863.	0,75355	1,32704	60′
1	77963	90225	87737.	60204:	79846	75401	32624	59
2	77979.	90215.	87764	60227:	69828.	75446.	32543.	58
3	77996.	90206	87790·	60251	79811	75492	32463.	57
4	78013	90196.	87816.	60274·	79793·	75537.	32383.	56
5	78029.	90187	87842:	60297.	79775.	75583.	32303.	55
6	78046.	90177.	87869	60320:	79758	75629	32223:	54
7	78063	90168	87895·	60343:	79740.	75675	32143:	53
8	78080	90158.	87921.	60367	79723	75720.	32063:	52
9	78096.	90148:	87947:	60390·	79705.	75766.	31984	51
10	78113	90139	87974	60413.	79688	75812	31904·	50
11	78130	90129.	88000·	60436:	79670.	75858	31824.	49
12	78146.	90120	88026.	60459:	79652:	75904	31745	48
13	78163	90110.	88052:	60483	79635	75949.	31665.	47
14	78180	90101	88078:	60506·	79617.	75995.	31586	46
15	78196.	90091·	88105	60529·	79600	76041.	31506.	45
16	78213	90081.	88131·	60552.	79582.	76087.	31427	44
17	78229.	90072	88157.	60575:	79564:	76133.	31348	43
18	78246	90062.	88183:	60598:	79547	76179.	31268.	42
19	78263	90052:	88210	60621:	79529.	76225.	31189.	41
′	L.Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	52°

37°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,78279.	9,90043	9,88236·	0,60645	0,79512	0,76271.	1,31110	40
21	78296	90033.	88262·	60668·	79494·	76317:	31031	39
22	78312.	90024	88288.	60691·	79476.	76363:	30952	38
23	78329	90014·	88314:	60714	79459	76409:	30873·	37
24	78345.	90004.	88341	60737.	79441·	76455:	30794.	36
25	78362	89995	88367·	60760:	79423.	76501:	30715:	35
26	78378.	89985·	88393·	60783:	79406	76547:	30636:	34
27	78395	89975.	88419.	60806:	79388·	76594	30558	33
28	78411.	89966	88445:	60829:	79370.	76640·	30479.	32
29	78428	89956·	88471:	60853	79353	76686·	30401	31
30	78444.	89946.	88498	60876·	79335·	76732.	30322.	30
31	78461	89936:	88524·	60899	79317.	76778:	30244	29
32	78477.	89927	88550·	60922·	79299:	76825	30165.	28
33	78494	89917.	88576.	60945·	79282	76871·	30087	27
34	78510·	89907:	88602:	60968·	79264·	76917.	30009	26
35	78526.	89898	88628:	60991·	79246.	76964	29930.	25
36	78543	89888·	88654:	61014.	79228:	77010·	29852.	24
37	78559.	89878.	88681	61037:	79211	77056.	29774.	23
38	78576	89868:	88707·	61060:	79193·	77103	29696	22
39	78592·	89859	88733·	61083:	79175.	77149·	29618·	21
40	78608.	89849·	88759·	61106:	79157:	77195.	29540.	20
41	78625	89839.	88785.	61129:	79140	77242	29462:	19
42	78641.	89829:	88811:	61152:	79122·	77288.	29384:	18
43	78657:	89820	88837:	61175:	79104.	77335	29307	17
44	78674	89810·	88863:	61198:	79086:	77381.	29229·	16
45	78690.	89800.	88889:	61221.	79068:	77428	29151.	15
46	78706:	89790:	88916	61244.	79051	77474.	29074	14
47	78723	89781	88942·	61267.	79033.	77521	28996.	13
48	78739·	89771·	88968·	61290.	79015.	77567.	28919	12
49	78755.	89761·	88994·	61313.	78997:	77614.	28841.	11
50	78772	89751.	89020·	61336.	78979:	77661	28764	10
51	78788·	89741:	89046·	61359.	78961:	77707.	28687	9
52	78804.	89731:	89072.	61382.	78944	77754	28609.	8
53	78820:	89722	89098:	61405.	78926·	77801	28532.	7
54	78837	89712·	89124:	61428.	78908·	77847.	28455.	6
55	78853·	89702·	89150:	61451	78890.	77894.	28378.	5
56	78869·	89692.	89176:	61474	78872:	77941	28301.	4
57	78885.	89682:	89202:	61497	78854:	77988	28224:	3
58	78901:	89672:	89228:	61520	78836:	78034.	28147:	2
59	78918	89663	89254:	61543	78818:	78081.	28070:	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	52°

38°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,78934·	9,89653·	9,89280:	0,61566	0,78801	0,78128.	1,27994	60
1	78950·	89643·	89307	61589	78783·	78175	27917·	59
2	78966.	89633·	89333·	61611.	78765·	78222	27840.	58
3	78982:	89623.	89359·	61634.	78747·	78269	27764	57
4	78998:	89613:	89385·	61657.	78729·	78316	27687.	56
5	79014:	89603:	89411·	61680.	78711·	78363	27611	55
6	79031	89593:	89437·	61703.	78693.	78410	27534.	54
7	79047·	89583:	89463·	61726	78675:	78456.	27458	53
8	79063·	89574	89489·	61749	78657:	78504	27382	52
9	79079·	89564·	89515·	61772	78639:	78551·	27305.	51
10	79095·	89554·	89541	61795	78621:	78598·	27229.	50
11	79111·	89544·	89567	61817.	78603:	78645·	27153	49
12	79127.	89534·	89593	61840.	78585:	78692·	27077	48
13	79143:	89524	89619	61863.	78567:	78739·	27001	47
14	79159:	89514·	89645	61886.	78549.	78786·	26925·	46
15	79175:	89504·	89671	61909	78531.	78833.	26849·	45
16	79191:	89494.	89697	61932	78513.	78880.	26773.	44
17	79207:	89484:	89723	61955	78495.	78928	26697:	43
18	79223.	89474:	89749	61977.	78477.	78975·	26621:	42
19	79239.	89464:	89775	62000.	78459.	79022·	26546	41
20	79255.	89454:	89801	62023.	78441.	79069.	26470.	40
21	79271.	89444.	89826.	62046	78423.	79117	26395	39
22	79287.	89434:	89852.	62069	78405	79164·	26319·	38
23	79303.	89424.	89878.	62091.	78387	79211.	26244	37
24	79319	89414.	89904.	62114.	78369	79259	26168.	36
25	79335	89404.	89930.	62137.	78351	79306·	26093	35
26	79351	89394.	89956.	62160	78333	79353.	26017.	34
27	79367	89384.	89982.	62183	78315	79401	25942.	33
28	79383	89374.	90008.	62205.	78297	79448.	25867	32
29	79399	89364	90034.	62228.	78278.	79496	25792	31
30	79414.	89354	90060.	62251	78260.	79543.	25717	30
31	79430.	89344	90086	62274	78242.	79591	25542	29
32	79446.	89334	90112	62296.	78224.	79638.	25567·	28
33	79462.	89324	90138	62319.	78206	79686	25492·	27
34	79478	89314	90164	62342	78188	79733.	25417·	26
35	79494	89304	90190	62365	78170	79781	25342.	25
36	79510	89294	90216	62387.	78152	79828.	25267:	24
37	79525.	89283.	90241.	62410.	78133.	79876.	25193	23
38	79541.	89273.	90267.	62433	78115.	79924	25118·	22
39	79557.	89263.	90293.	62456	78097.	79971.	25043.	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	51°

38°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,79573	9,89253.	9,90319.	0,62478.	0,78079	0,80019.	1,24969.	20
41	79589	89243.	90345.	62501.	78061	80067	24894.	19
42	79604.	89233	90371	62524	78043	80115	24820	18
43	79620.	89223	90397	62546.	78024.	80162.	24746	17
44	79636	89213	90423	62569.	78006.	80210.	24671.	16
45	79652	89203	90449	62592	77988	80258	24597	15
46	79667.	89192.	90474.	62615	77970	80306	24523	14
47	79683.	89182.	90500.	62637.	77952	80354	24449	13
48	79699	89172.	90526.	62660	77933.	80402	24374.	12
49	79715	89162	90552.	62683	77915.	80449.	24300.	11
50	79730.	89152	90578	62705.	77897	80497.	24226.	10
51	79746	89142	90604	62728	77879	80545.	24152:	9
52	79762	89131.	90630	62751	77860.	80593.	24078:	8
53	79777.	89121.	90656	62773.	77842.	80641.	24005	7
54	79793	89111.	90681.	62796	77824	80689:	23931	6
55	79809	89101	90707.	62818.	77806	80737:	23857.	5
56	79824.	89091	90733.	62841.	77787.	80785:	23783:	4
57	79840	89080.	90759	62864	77769	80834	23710	3
58	79855.	89070.	90785	62886.	77751	80882	23636.	2
59	79871.	89060	90811	62909	77733.	80930	23563	1
39°								51°
0′	9,79887	9,89050	9,90836.	0,62932	0,77714.	0,80978	1,23489.	60′
1	79902.	89040	90862.	62954.	77696	81026.	23416	59
2	79918	89029.	90888.	62977	77677.	81074:	23342.	58
3	79933.	89019.	90914	62999.	77659.	81122:	23269.	57
4	79949.	89009	90940	63022	77641	81171	23196	56
5	79965	88999	90966	63045	77622.	81219.	23123	55
6	79980.	88988.	90991.	63067.	77604.	81267:	23049.	54
7	79956	88978	91017.	63090	77586	81316	22976.	53
8	80011.	88968	91043	63112.	77567.	81364	22903.	52
9	80027	88957.	91069	63135	77549.	81412	22830.	51
10	80042.	88947.	91095	63157.	77531	81461	22757:	50
11	80058	88937	91120.	63180	77512.	81509.	22684:	49
12	80073.	88927	91146.	63202.	77494	81558	22612	48
13	80089	88916.	91172	63225	77476	81606	22539	47
14	80104.	88906	91198	63248	77457.	81654.	22466.	46
15	80120	88896	91224	63270.	77439	81703	22393:	45
16	80135.	88885.	91249.	63293	77420.	81751.	22321	44
17	80151	88875	91275.	63315.	77402	81800	22248.	43
18	80166	88865	91301	63338	77384	81849	22176	42
19	80181.	88854.	91327	63360.	77365.	81897.	22103.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	50°

39°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,80197	9,88844	9,91352.	0,63383	0,77347	0,81946	1,22031	40
21	80212.	88834	91378.	63405	77328.	81994.	21958.	39
22	80228	88823.	91404	63428	77310	82043.	21886	38
23	80243.	88813	91430	63450.	77291.	82092	21814	37
24	80258:	88802.	91455.	63473	77273	82140.	21741.	36
25	80274	88792.	91481.	63495.	77254.	82189.	21669.	35
26	80289.	88782	91507	63517:	77236	82238	21597.	34
27	80305	88771.	91533	63540	77217.	82287	21525.	33
28	80320	88761	91558.	63562.	77199	82335.	21453.	32
29	80335.	88751	91584	63585	77180.	82384.	21381:	31
30	80351	88740.	91610	63607	77162	82433.	21309:	30
31	80366	88730	91636	63630	77143.	82482.	21237:	29
32	80381.	88719.	91661.	63652.	77125	82531	21166	28
33	80396:	88709	91687.	63675	77106.	82580	21094	27
34	80412	88698	91713	63697.	77088	82629	21022.	26
35	80427.	88688	91739	63719:	77069.	82678	20950:	25
36	80442:	88678	91764.	63742	77051	82727	20879	24
37	80458	88667	91790.	63764.	77032.	82776	20807.	23
38	80473	88657	91816	63787	77014	82825	20736	22
39	80488.	88646	91841.	63809.	76995.	82874	20664.	21
40	80503:	88636	91867.	63832	76977	82923	20593	20
41	80519	88625	91893	63854	76958.	82972	20521.	19
42	80534	88615	91919	63876.	76939:	83021.	20450.	18
43	80549.	88604.	91944.	63899	76921	83070:	20379	17
44	80564:	88594	91970.	63921.	76902.	83119:	20308	16
45	80579:	88583.	91996	63943:	76884	83169	20236.	15
46	80595	88573	92021.	63966	76865.	83218	20165.	14
47	80610	88562.	92047.	63988.	76846:	83267.	20094.	13
48	80625	88552	92073	64010:	76828	83316:	20023.	12
49	80640.	88541.	92098.	64033	76809.	83366	19952:	11
50	80655:	88531	92124.	64055.	76791	83415	19881:	10
51	80670:	88520.	92150	64077:	76772	83464.	19810:	9
52	80686	88510	92176	64100	76753.	83514	19740	8
53	80701	88499.	92201.	64122.	76735	83563.	19669	7
54	80716	88488	92227	64144:	76716.	83612:	19598.	6
55	80731	88478	92253	64167	76697:	83662	19527:	5
56	80746	88467	92278.	64189.	76679	83711.	19457	4
57	80761	88457	92304	64211:	76660.	83761	19386.	3
58	80776:	88446	92330	64234	76641:	83810.	19316	2
59	80791:	88435:	92355.	64256	76623	83860	19245.	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	50°

40°	L. Sin.	L. Cos	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,80806:	9,88425	9,92381	0,64278.	0,76604·	0,83909.	1,19175	60
1	80821:	88414.	92407	64301	76585.	83959.	19104.	59
2	80836:	88404	92432.	64323.	76567	84009	19034.	58
3	80851:	88393.	92458	64345.	76548·	84058.	18964	57
4	80866:	88382:	92483.	64367:	76529.	84108	18894	56
5	80881:	88372	92509.	64390	76510:	84158	18823.	55
6	80896.	88361.	92535	64412·	76492	84207.	18753.	54
7	80911.	88351	92560.	64434.	76473·	84257.	18683.	53
8	80926.	88340·	92586.	64456:	76454.	84307	18613.	52
9	80941.	88329.	92612	64479	76435:	84357	18543:	51
10	80956.	88319	92637.	64501·	76417	84406.	18473:	50
11	80971.	88308·	92663	64523.	76398·	84456.	18403:	49
12	80986.	88297.	92689	64545:	76379.	84506.	18334	48
13	81001.	88287	92714.	64567:	76360:	84556	18264·	47
14	81016.	88276·	92740	64590	76342	84606	18194·	46
15	81031.	88265.	92765.	64612·	76323·	84656	18124.	45
16	81046.	88254:	92791.	64634.	76304·	84706	18055	44
17	81061	88244	92817	64656:	76285.	84756	17985.	43
18	81076	88233.	92842.	64678:	76266:	84806	17915:	42
19	81091	88222:	92868	64701	76248	84856·	17846	41
20	81106	88212	92893.	64723·	76229·	84906·	17776.	40
21	81120.	88201·	92919.	64745.	76210·	84956·	17707.	39
22	81135.	88190.	92945	64767:	76191.	85006·	17638	38
23	81150.	88179:	92970.	64789:	76172:	85056.	17568.	37
24	81165.	88169	92996	64811:	76153:	85106:	17499.	36
25	81180	88158·	93021.	64834	76134:	85156:	17430	35
26	81195	88147.	93047.	64856·	76116	85207	17361	34
27	81210	88136:	93073	64878·	76097·	85257·	17292	33
28	81224.	88126	93098.	64900.	76078·	85307.	17222.	32
29	81239.	88115·	93124	64922:	76059·	85357.	17153.	31
30	81254	88104.	93149.	64944:	76040.	85408	17084:	30
31	81269	88097:	93175	64966:	76021:	85458·	17016	29
32	81284	88082:	93201	64989	76002:	85508.	16947·	28
33	81298.	88072	93226.	65011·	75983:	85559	16878·	27
34	81313.	88061·	93252·	65033·	75964:	85609	16809·	26
35	81328	88050.	93277.	65055·	75946	85659	16740.	25
36	81343	88039:	93303	65077·	75927·	85710	16672	24
37	81357.	88028:	93328.	65099.	75908·	85760.	16603·	23
38	81372	88018	93354	65121:	75889·	85811	16534.	22
39	81387	88007·	93380	65143:	75870·	85861.	16466	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	49°

40°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	
40′	9,81401.	9,87996·	9,93405.	0,65165:	0,75851·	0,85912	1,16397.	20
41	81416.	87985·	93431	65187:	75832·	85962.	16329	19
42	81431	87974.	93456.	65209:	75813·	86013.	16260.	18
43	81445.	87963:	93482	65231:	75794·	86064	16192	17
44	81460.	87952:	93507.	65253:	75775·	86114.	16124	16
45	81475	87941:	93533	65275:	75756·	86165.	16055.	15
46	81489.	87931	93558.	65298	75737.	86216	15987	14
47	81504.	87920·	93584	65320·	75718.	86266.	15919	13
48	81519	87909·	93609.	65342·	75699.	86317.	15851	12
49	81533.	87898·	93635.	65364·	75680	86368	15783	11
50	81548	87887·	93661	65386·	75661	86419	15714.	10
51	81563	87876.	93686.	65408·	75642	86470	15646.	9
52	81577.	87865:	93712	65430	75623	86520.	15578:	8
53	81592	87854:	93737.	65452	75604	86571.	15511	7
54	81606.	87843:	93763	65474	75585	86622.	15443·	6
55	81621.	87832:	93788.	65496	75566	86673.	15375·	5
56	81636	87821:	93814	65518	75547	86724.	15307.	4
57	81650.	87810:	93839.	65540	75528	86775.	15239:	3
58	81665	87799:	93865	65561.	75509	86826:	15172	2
59	81679.	87788:	93890.	65583.	75490	86877:	15104·	1
41°								49°
0′	9,81694	9,87777:	9,93916	0,65605.	0,75470.	0,86928:	1,15036.	60′
1	81708.	87767	93941.	65627.	75451.	86979:	14969	59
2	81723	87756·	93967	65649.	75432.	87030:	14901.	58
3	81737.	87745	93992.	65671.	75413.	87082	14834	57
4	81752	87734	94018	65693.	75394.	87133·	14766.	56
5	81766.	87722.	94043.	65715.	75375	87184·	14699	55
6	81781	87711.	94069	65737.	75356	87235.	14632	54
7	81795.	87700.	94094.	65759	75337	87286:	14564.	53
8	81810	87689.	94120	65781	75318	87338	14497.	52
9	81824.	87678.	94145.	65803	75298.	87389·	14430	51
10	81839	87667.	94171	65825	75279.	87440.	14363	50
11	81853.	87656.	94196.	65847	75260.	87492	14296	49
12	81868	87645.	94222	65868.	75241	87543·	14229	48
13	81882·	87634.	94247.	65890.	75222	87594·	14162	47
14	81896.	87623.	94273	65912.	75203	87646	14095·	46
15	81911	87612.	94298.	65934.	75183.	87697.	14028·	45
16	81925.	87601	94324	65956	75164.	87749	13961·	44
17	81940	87590	94349.	65978	75145.	87800.	13894·	43
18	81954.	87579	94375	66000	75126	87852	13827.	42
19	81968:	87568	94400.	66022	75107	87903.	13760.	41
′	L.Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	48°

41°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,81983	9,87557	9,94426	0,66043	0,75088	0,87955	1,13694	40
21	81997	87545	94451	66065	75068	88006	13627	39
22	82011	87534	94477	66087	75049	88058	13560	38
23	82026	87523	94502	66109	75030	88110	13494	37
24	82040	87512	94528	66131	75011	88161	13427	36
25	82054	87501	94553	66153	74991	88213	13361	35
26	82069	87490	94579	66174	74972	88265	13294	34
27	82083	87479	94604	66196	74953	88317	13228	33
28	82097	87467	94629	66218	74934	88368	13162	32
29	82112	87456	94655	66240	74914	88420	13095	31
30	82126	87445	94680	66262	74895	88472	13029	30
31	82140	87434	94706	66283	74876	88524	12963	29
32	82154	87423	94731	66305	74857	88576	12897	28
33	82169	87412	94757	66327	74837	88628	12830	27
34	82183	87400	94782	66349	74818	88680	12764	26
35	82197	87389	94808	66370	74799	88732	12698	25
36	82211	87378	94833	66392	74779	88784	12632	24
37	82226	87367	94858	66414	74760	88836	12566	23
38	82240	87355	94884	66436	74741	88888	12500	22
39	82254	87344	94909	66457	74721	88940	12434	21
40	82269	87333	94935	66479	74702	88992	12369	20
41	82283	87322	94960	66501	74683	89044	12303	19
42	82297	87311	94986	66523	74663	89096	12237	18
43	82311	87299	95011	66544	74644	89148	12171	17
44	82325	87288	95037	66566	74625	89201	12106	16
45	82339	87277	95062	66588	74605	89253	12040	15
46	82353	87265	95087	66609	74586	89305	11974	14
47	82367	87254	95113	66631	74566	89357	11909	13
48	82382	87243	95138	66653	74547	89410	11843	12
49	82396	87232	95164	66674	74528	89462	11778	11
50	82410	87220	95189	66696	74508	89515	11713	10
51	82424	87209	95215	66718	74489	89567	11647	9
52	82439	87198	95240	66739	74469	89619	11582	8
53	82452	87186	95265	66761	74450	89672	11517	7
54	82466	87175	95291	66783	74431	89724	11451	6
55	82480	87164	95316	66804	74411	89777	11386	5
56	82494	87152	95342	66826	74392	89829	11321	4
57	82508	87141	95367	66848	74372	89882	11256	3
58	82523	87130	95392	66869	74353	89935	11191	2
59	82537	87118	95418	66891	74333	89987	11126	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	48°

42°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	9,82551	9,87107	9,95443	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	60
1	82565	87096	95469	66934	74295	90093	10996	59
2	82579	87084	95494	66956	74275	90146	10931	58
3	82593	87073	95519	66977	74256	90198	10866	57
4	82607	87061	95545	66999	74236	90251	10801	56
5	82621	87050	95570	67021	74217	90304	10736	55
6	82635	87038	95596	67042	74197	90356	10672	54
7	82649	87027	95621	67064	74178	90409	10607	53
8	82663	87016	95646	67085	74158	90462	10542	52
9	82677	87004	95672	67107	74139	90515	10478	51
10	82690	86993	95697	67129	74119	90568	10413	50
11	82704	86981	95723	67150	74099	90621	10349	49
12	82718	86970	95748	67172	74090	90674	10284	48
13	82732	86953	95773	67193	74060	90727	10220	47
14	82746	86947	95799	67215	74041	90780	10155	46
15	82760	86935	95824	67236	74021	90833	10091	45
16	82774	86924	95850	67258	74002	90886	10027	44
17	82788	86913	95875	67279	73982	90939	09962	43
18	82802	86901	95900	67301	73963	90992	09898	42
19	82816	86890	95926	67322	73943	91046	09834	41
20	82830	86878	95951	67344	73923	91099	09770	40
21	82843	86867	95976	67365	73904	91152	09706	39
22	82857	86855	96002	67387	73884	91205	09642	38
23	82871	86843	96027	67408	73865	91259	09577	37
24	82885	86832	96053	67430	73845	91312	09513	36
25	82899	86820	96078	67451	73825	91365	09450	35
26	82913	86809	96103	67473	73806	91419	09386	34
27	82926	86797	96129	67494	73786	91472	09322	33
28	82940	86786	96154	67516	73767	91526	09258	32
29	82954	86774	96179	67537	73747	91579	09194	31
30	82968	86763	96205	67559	73727	91633	09130	30
31	82982	86751	96230	67580	73708	91686	09067	29
32	82995	86739	96255	67601	73688	91740	09003	28
33	83009	86728	96281	67623	73668	91793	08939	27
34	83023	86716	96306	67644	73649	91847	08876	26
35	83037	86705	96332	67666	73629	91901	08812	25
36	83050	86693	96357	67687	73609	91954	08749	24
37	83064	86681	96382	67709	73590	92008	08685	23
38	83078	86670	96408	67730	73570	92062	08622	22
39	83092	86658	96433	67751	73550	92115	08558	21
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	47°

42°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
40′	9,83105.	9,86646:	9,96458.	0,67773	0,73530:	0,92169.	1,08495.	20
41	83119.	86635	96484	67794.	73511	92223.	08432	19
42	83133	86623.	96509.	67815:	73491·	92277	08368.	18
43	83146.	86612	96534:	67837.	73471.	92331	08305.	17
44	83160.	86600·	96560	67858.	73451:	92385	08242.	16
45	83174	86588.	96585.	67880	73432	92439	08179	15
46	83187.	86577	96610:	67901·	73412.	92493	08116	14
47	83201.	86565·	96636	67922.	73392:	92546.	08053	13
48	83215	86553.	96661.	67944	73372:	92601	07990	12
49	83228.	86541:	96686:	67965·	73353	92655·	07927	11
50	83242	86530	96712	67986.	73333·	92709·	07864·	10
51	83256	86518·	96737.	68008	73313.	92763·	07801·	9
52	83269.	86506.	96762:	68029·	73293:	92817·	07738·	8
53	83283	86495	06788	68050.	73274	92871.	07675.	7
54	83296.	86483·	96813.	68072	73254·	92925:	07612:	6
55	83310	86471.	96838:	68093·	73234·	92979:	07550	5
56	83324	86459:	96864	68114.	73214.	93034	07487·	4
57	83337.	86448	96889.	68135:	73194:	93088·	07424.	3
58	83351	86436·	96914:	68157	73175	93142.	07362	2
59	83364.	86424.	96940	68178.	73155·	93197	07299·	1
43°								47°
0′	9,83378	9,86412:	9,96965.	0,68199:	0,73135·	0,93251.	1,07236.	60′
1	83391.	86400:	96990:	68221	73115.	93305:	07174	56
2	83405	86389	97016	68242·	73095:	93360	07111.	58
3	83418.	86377·	97041.	68263.	73075:	93414.	07049	57
4	83432	86365.	97066:	68284:	73055:	93469	06987	56
5	83445.	86353:	97092	68306	73036	93523.	06924.	55
6	83459	86341:	97117.	68327·	73016·	93578	06862	54
7	83472.	86330	97142:	68348.	72996·	93632.	06800	53
8	83486	86318·	97168	68369:	72976·	93687.	06737.	52
9	83499.	86306·	97193·	68391	72956.	93742	06675.	51
10	83513	96294.	97218.	68412·	72936:	93796.	06613	50
11	83526.	86282:	97244	68433.	72916:	93851.	06551	49
12	83540	86270:	97269·	68454:	72896:	93906	06489	48
13	83553.	86259	97294.	68475:	72876:	93961	06427	47
14	83567	86247·	97320	68497	72857	94015.	06365	46
15	83580.	86235·	97345·	68518·	72837·	94070.	06303·	45
16	83594	86223·	97370.	68539·	72817·	94125	06241·	44
17	83607.	86211·	97396	68560.	72797·	94180	06179·	43
18	83620:	86199.	97421·	68581:	72777·	94235	06117·	42
19	83634	86187:	97446.	68603	72757·	94290	06055.	41
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	46°

43°	L. Sin.	L. Cos.	L.Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
20′	9,83647.	9,86175:	9,97471:	0,68624·	0,72737·	0,94345	1,05993:	40
21	83661	86163:	97497	68645·	72717·	94400	05932	39
22	83674	86151:	97522.	68666·	72697·	94455·	05870·	38
23	83687.	86139:	97547:	68687.	72677·	94510	05808.	37
24	83701	86128	97573	68708:	72657·	94565·	05747	36
25	83714.	86116·	97598·	68729:	72637·	94620·	05685·	35
26	83727:	86104·	97623.	68751	72617	94675.	05623.	34
27	83741	86092·	97649	68772·	72597	94730:	05562	33
28	83754.	86080·	97674·	68793·	72577	94785:	05500.	32
29	83767:	86068·	97699.	68814·	72557	94841	05439	31
30′	83781	86056·	97724:	68835·	72537	94896·	05378	30
31	83794.	86044·	97750	68856.	72517	94951.	05316.	29
32	83807:	86032	97775.	68877:	72497	95007	05255.	28
33	83821	86020	97800:	68898:	72477	95062·	05194	27
34	83834·	86008	97826	68919:	72457	95117.	05132.	26
35	83847.	85996	97851·	68940:	72437	95173	05071.	25
36	83860:	85984	97876.	68961:	72417	95228.	05010	24
37	83874	85972	97902	68983	72397	95284	04949	23
38	83887·	85960	97927·	69004·	72377	95339.	04888	22
39	83900.	85948	97952.	69025·	72356.	95395	04827	21
40	83913:	85935.	97977:	69046·	72336.	95450.	04765.	20
41	83927	85923.	98003	69067·	72316.	95506	04704.	19
42	83940·	85911.	98028.	69088·	72296.	95562	04644	18
43	83953.	85899.	98053:	69109·	72276.	95617.	04583·	17
44	83966:	85887.	98079	69130·	72256.	95673	04522·	16
45	83980	85875.	98104·	69151·	72236	95729	04461·	15
46	83993·	85863.	98129.	69172·	72216	95784.	04400.	14
47	84006·	85851	98155	69193	72196	95840.	04339:	13
48	84019.	85839	98180·	69214	72176	95896.	04279	12
49	84032:	85827	98205.	69235	72155.	95952	04218·	11
50	84045:	85815	98230:	69256	72135.	96008	04157.	10
51	84059	85802.	98256	69277	72115.	96064	04097	9
52	84072·	85790.	98281·	69298	72095	96120	04036·	8
53	84085·	85778.	98306.	69319	72075	96176	03975.	7
54	84098·	85766	98332	69340	72055	96232·	03915	6
55	84111.	85754	98357·	69361	72034.	96288·	03854.	5
56	84124:	85742	98382.	69382	72014.	96344·	03794	4
57	84137:	85729.	98407:	69403	71994.	96400·	03734	3
58	84150:	85717.	98433	69423.	71974	96456.	03673.	2
59	84164	85705.	98458·	69444.	71954	96512:	03613	1
′	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	46°

44°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	′
0′	0,84177	9,85693	9,98483	0,69465	0,71933	0,96568	1,03553	60
1	84190	85681	98509	69486	71913	96625	03492	59
2	84203	85668	98534	69507	71893	96681	03432	58
3	84216	85656	98559	69528	71873	96737	03372	57
4	84229	85644	98584	69549	71853	96793	03312	56
5	84242	85632	98610	69570	71832	96850	03252	55
6	84255	85620	98635	69591	71812	96906	03191	54
7	84268	85607	98660	69612	71792	96963	03131	53
8	84281	85595	98685	69633	71772	97019	03071	52
9	84294	85583	98711	69653	71751	97076	03011	51
10	84307	85571	98736	69674	71731	97132	02952	50
11	84320	85558	98761	69695	71711	97189	02892	49
12	84333	85546	98787	69716	71691	97245	02832	48
13	84346	85534	98812	69737	71670	97302	02772	47
14	84359	85521	98837	69758	71650	97359	02712	46
15	84372	85509	98862	69779	71630	97415	02652	45
16	84385	85497	98888	69799	71609	97472	02593	44
17	84398	85484	98913	69820	71589	97529	02533	43
18	84411	85472	98938	69841	71569	97585	02473	42
19	84424	85460	98963	69862	71548	97642	02414	41
20	84437	85447	98989	69883	71528	97699	02354	40
21	84450	85435	99014	69903	71508	97756	02295	39
22	84463	85423	99039	69924	71487	97813	02235	38
23	84476	85410	99065	69945	71467	97870	02176	37
24	84488	85398	99090	69966	71447	97927	02116	36
25	84501	85386	99115	69987	71426	97984	02057	35
26	84514	85373	99140	70007	71406	98041	01997	34
27	84527	85361	99166	70028	71386	98098	01938	33
28	84540	85349	99191	70049	71365	98155	01879	32
29	84553	85336	99216	70070	71345	98212	01819	31
	84566	85324	99241	70090	71325	98269	01760	30
	84579	85311	99267	70111	71304	98326	01701	29
	84591	85299	99292	70132	71284	98384	01642	28
	84604	85286	99317	70153	71263	98441	01583	27
	84617	85274	99343	70173	71243	98498	01524	26
	84630	85262	99368	70194	71223	98556	01465	25
	84643	85249	99393	70215	71202	98613	01406	24
	84635	85237	99418	70236	71182	98670	01347	23
	84668	85224	99444	70256	71161	98728	01288	22
	84681	85212	99469	70277	61141	98785	01229	21
	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	45°

44°	L. Sin.	L. Cos.	L. Tang	Sin.	Cos.	Tang.	Cot.	'
40'	9,84694	9,85199.	9,99494.	0,70298	0,71120.	0,98843	1,01170·	20
41	84707	85187	99519:	70318.	71100	98900.	01111.	19
42	84719.	85174.	99545	70339	71079.	98958	01052:	18
43	84732.	85162	99570·	70360	71059	99015.	00993:	17
44	84745	85149.	99595.	70380.	71039	99073	00935	16
45	84758	85137	99621	70401	71018.	99131	00876·	15
46	84770.	85124.	99616·	70422	70998	99188.	00817.	14
47	84783.	85112	99671.	70442.	70977.	99246.	00759	13
48	84796	85099.	99696:	70463	70957	99304	00700.	12
49	84809	85087	99722	70484	70936.	99362	00642	11
50	84821.	85074.	99747·	70504.	70916	99419.	00583·	10
51	84834.	85061.	99772.	70525	70895.	99477.	00524.	9
52	84947	85049	99797:	70545.	70875	99535.	00466.	8
53	84859.	85036.	99823	70566.	70854.	99593.	00408	7
54	84872.	85024	99848·	70587	70833:	99651.	00349.	6
55	84885	85011.	99873.	70607.	70813	99709.	00291	5
56	84897.	84998:	99898:	70628	70792.	99767:	00232.	4
57	84910.	84986	99924	70648.	70772	99825:	00174.	3
58	84923	84973.	99949·	70669.	70751.	99883:	00116	2
59	84935.	84961	99974.	70690	70731	99941:	00058	1
60	84948.	84948.	10,0000	70710.	70710.	1,00000	1,00000	0
'	L. Cos.	L. Sin.	L. Cot.	Cos.	Sin.	Cot.	Tang.	45°

III.

Tafel

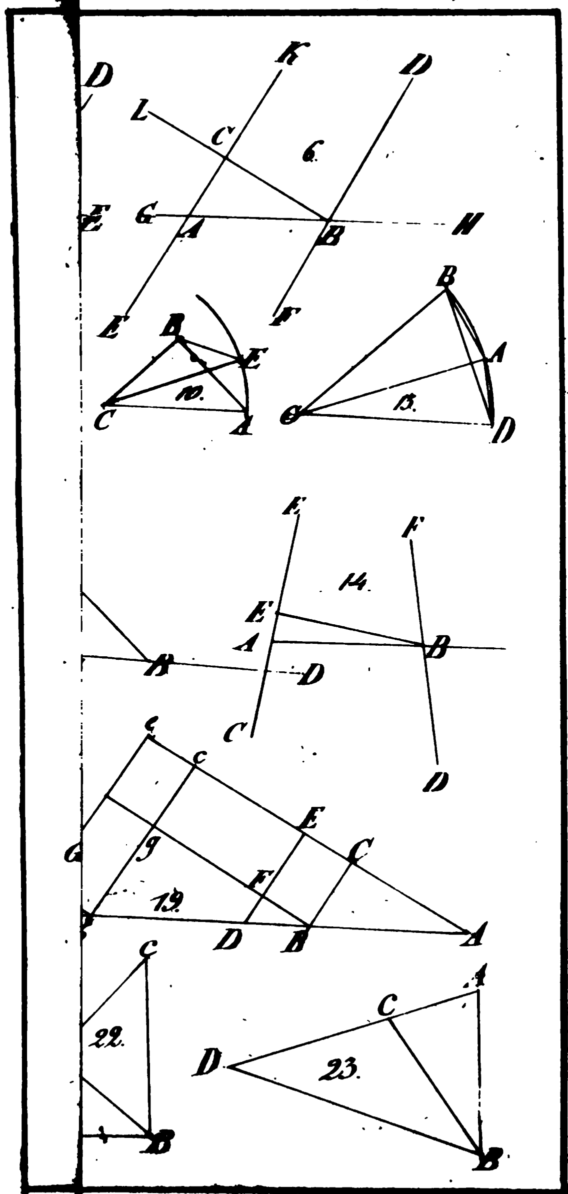
für die

ängen von Kreisbögen,

die des Radius = 1 gesetzt.

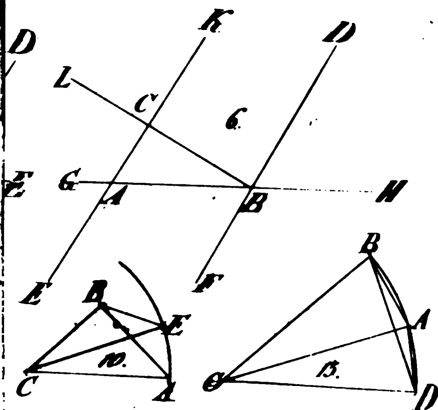
$\widehat{\varphi}^{0}=$	$\widehat{\varphi}'=0,0$	$\widehat{\varphi}''=0,000$	φ	$\widehat{\varphi}^{0}=$	$\widehat{\varphi}'=0,0$	$\widehat{\varphi}''=0,000$
0,0174532.	002908.	0048	46	0,8028514.	133808.	2230
0349065.	005817.	0096.	47	8203047	136717.	2278.
0523598.	008726.	0145	48	8377580	139626	2327
0698131:	011635.	0193.	49	8552113	142535	2375.
0872664.	014544	0242	50	8726462	145444	2424
1047197.	017453	0290.	51	8901179	148352.	2472.
1221730	020362	0339	52	9075712	151261.	2521
1396263	023271	0387.	53	9250245	154170.	2569.
1570796	026179.	0436	54	9424777.	157079.	2617.
1745329	029088.	0484.	55	9599310.	159988.	2666
1919862	031997.	0533	56	9773843.	162897	2714.
2094395	034906.	0581.	57	9948376.	165806	2763
2268928	037815	0630	58	1,0122909.	168715	2811.
2443460.	040724	0678.	59	0297442.	171624	2860
2617993.	043633	0727	60	0471975.	174532.	2908.
2792526.	046542	0775.	61	0646508		
2967059.	049450.	0824	62	0821041		
3141592.	052359.	0872.	63	0995574		
3316125.	055268.	0921	64	1170107		
3490659.	058177.	0969.	65	1344640		
3665191.	061086.	1019	66	1519173		
3839724	063995	1066.	67	1693705.		
4014257	066904	1115.	68	1868238.		
4188790	069813	1163.	69	2042771.		
4363323	072722	1212	70	2217304.		
4537856	075630.	1260.	71	2391837.		
4712388:	078539.	1308:	72	2566370.		
4886921.	081448.	1357	73	2740903.		
5061454.	084357.	1405.	74	2915436		
5235987.	087266	1454	75	3089969		
5410520.	090175	1502.	76	3264502		
5585053.	093084	1551	77	3439035		
5759586.	095993	1599.	78	3613568		
5934119	098901.	1648.	79	3788101		
6108652	101810.	1696.	80	3962634		
6283185	104719.	1745	81	4137166.		
6457718	107628.	1793.	82	4311699.		
6632251	110537.	1842	83	4486232.		
6806784	113446	1890.	84	4660765.		
6981317.	116355	1939	85	4335298.		
7155849.	119264	1987.	86	5009831.		
7330382.	122173	2036	87	5184364		
7504915.	125081.	2084.	88	5358897		
7679448.	127990.	2133	89	5533430		
7853981.	130899.	2181.	90	5707963		

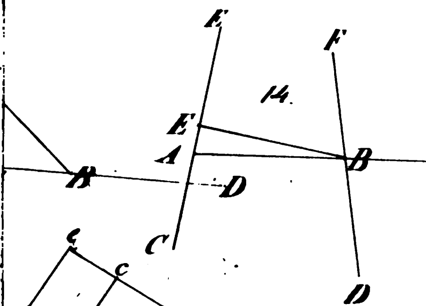
Gedruckt bey Friedrich Ernst Huth.

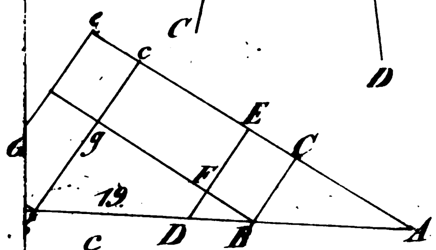


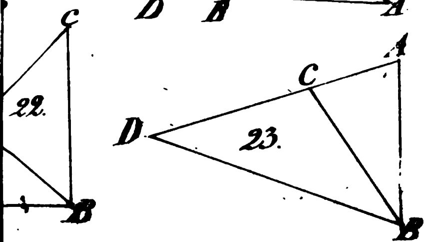
D
K
D
L
C
6.
E
G
A
B
H
E
F
B
E
10.
C
A
B
A
13.
D
E
F
14.
E
A
B
B
D
C
D
c
E
C
G
9
F
19.
D
B
A
C
22.
B
A
C
D
23.
B

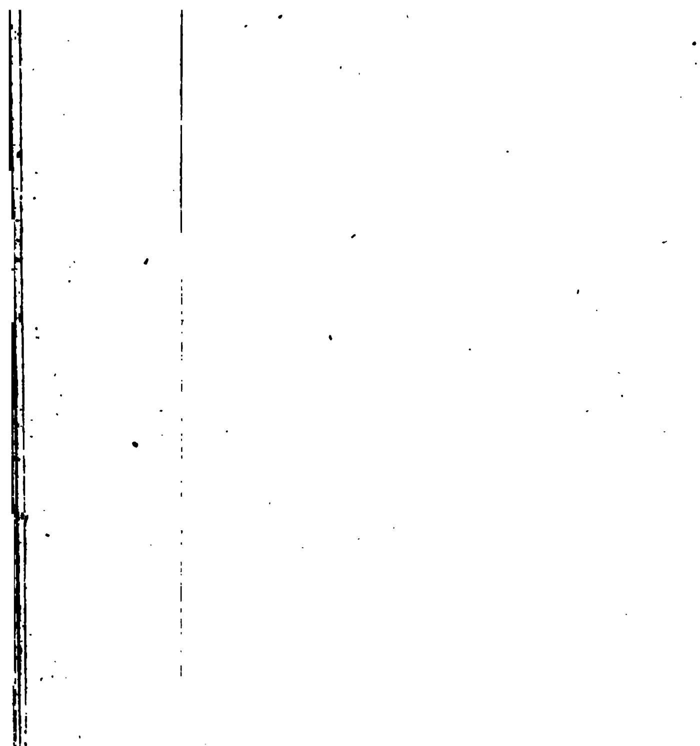
Gedruckt bey Friedrich Ernst H

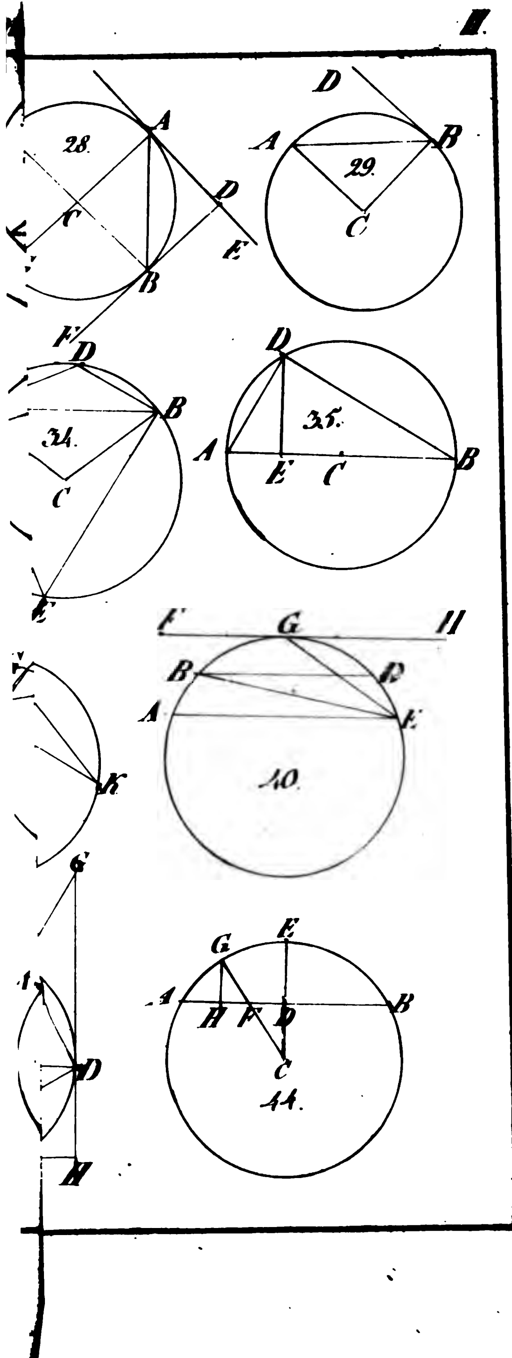

K
D
D
L
C
6.
E
G
A
B
H
E
F
B
E
10.
C
A
B
A
13.
C
D

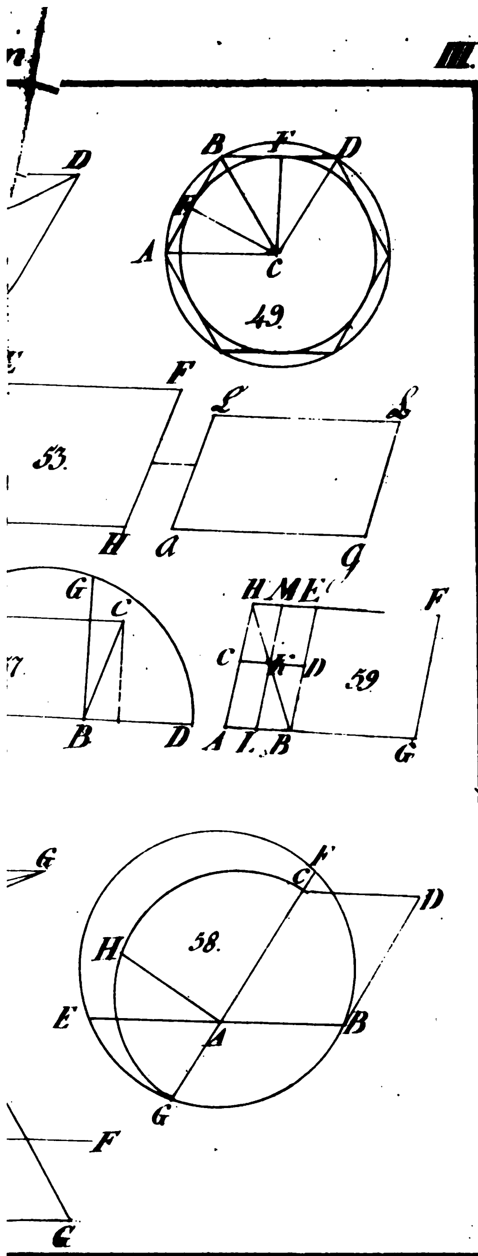

F
F
14.
E
A
B
B
D
C
D


c
c
E
G
g
C
F
19.
D
B
A


C
A
C
22.
D
23.
B
B




28.
A
D
E
C
B
F
29.
D
A
B
C
34.
D
B
C
E
35.
D
A
E
C
B
F
G
H
B
D
A
E
K
40.
G
E
G
A
B
H
F
D
C
D
H
41.


III.
49.
B F D
A C
53.
F
Q Q
H a q
G C
B D
H M E
C K D
A L B
F
59.
G
58.
F
C
D
H
E A B
G
F
G



II.

